

Czechoslovak Mathematical Journal

Václav Alda

Замечание к распределению Пуассона

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 2 (1952), No. 3, 243–246

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/100049>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1952

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ЗАМЕЧАНИЕ К РАСПРЕДЕЛЕНИЮ ПУАССОНА

ВАЦЛАВ АЛЬДА (Václav Alda), Прага.

(Поступило в редакцию 25/II 1952 г.)

Установлено необходимое и достаточное условие сходимости к распределению Пуассона, подобное условию Райкова для распределения Гаусса.

Райков [1] установил интересное соотношение между законом больших чисел и центральным предельным законом. Доказательство для случая „элементарной системы“ (см. далее) случайных величин приводится в [2]. Это замечание посвящено доказательству подобного соотношения для распределения Пуассона.

Пусть дана элементарная система случайных величин

$$\begin{array}{c} \xi_{11}, \dots, \xi_{1k_1} \\ \dots\dots\dots \\ \xi_{n1}, \dots, \xi_{nk_n} \\ \dots\dots\dots \end{array}$$

т. е. система, удовлетворяющая следующим условиям:

1° $\int x dF_{nj}(x) = 0$, $\int x^2 dF_{nj} = b_{nj} < \infty$ (F_{nj} — распределение случайных величин ξ_{nj})¹⁾,

2° величины ξ_{nj} ($j = 1, 2, \dots, k_n$) независимы,

3° $\sum_j b_{nj} = 1$,

4° $\text{Max}_j b_{nj} \rightarrow 0$ для $n \rightarrow \infty$.

Далее обозначим

$$P(x) = e^{-1} \sum_{0 \leq j < [x+1]} \frac{1}{j!} \tag{1}$$

Теорема: необходимым и достаточным условием того, чтобы распределение суммы $\sum_{j=1}^{k_n} \xi_{nj}$ сходилось по существу к $P(x)$, является сходимость по вероятности выражения

¹⁾ Подразумеваются пределы интегрирования $+\infty$ и $-\infty$.

$$S_n = \sum_j (\xi_{nj}^2 - \xi_{nj})$$

к единице.

Доказательство. I. Так как величины $\xi_{nj}^2 - \xi_{nj}$ независимы, имеет место

$$\Phi_n(t) = \prod_j \varphi_{nj}(t)$$

если Φ_n — характеристическая функция суммы S_n , а φ_{nj} — характеристические функции отдельных слагаемых. Известно, что эквивалентное условие сходимости по вероятности S_n к единице имеет вид

$$\Phi_n(t) \rightarrow e^{it} \quad \text{для } n \rightarrow \infty \text{ при любом } t. \quad (2)$$

II. Докажем прежде всего следующие (условие леммы Баули): для любого t имеет место $\sum_j |\varphi_{nj}(t) - 1|^2 \rightarrow 0$ для $n \rightarrow \infty$ (3). Согласно 1° имеем

$$\begin{aligned} \varphi_{nj}(t) - 1 &= \int (e^{it(x^2-x)} - 1) dF_{nj}(x) = \\ &= \int (e^{it(x^2-x)} - 1 - it(x^2-x)) dF_{nj}(x) + itb_{nj}. \end{aligned}$$

Интеграл в правой части будет

$$\int \dots = \int_{x < -1/2} \dots + \int_{-1/2 \leq x \leq 3/2} \dots + \int_{x > 3/2} \dots$$

Для крайних членов воспользуемся оценкой

$$|e^{it(x^2-x)} - 1 - it(x^2-x)| \leq 2|t|(x^2-x) \leq 6|t|x^2,$$

для среднего же

$$|e^{it(x^2-x)} - 1 - it(x^2-x)| \leq \frac{1}{2}t^2(x^2-x)^2 < 2t^2x^2.$$

В силу этого будет $|\varphi_{nj}(t) - 1| \leq (7|t| + 2t^2)b_{nj}$ и значит по 1°

$$\sum_j |\varphi_{nj}(t) - 1|^2 \leq (7|t| + 2t^2)^2 \operatorname{Max}_j b_{nj}$$

откуда с учетом условия 4° получим (3).

По лемме Баули (2) эквивалентно утверждению: для любого t и для $n \rightarrow \infty$ будет $\sum_j (\varphi_{nj}(t) - 1) \rightarrow it$. (4)

III. Условие необходимо. Согласно 1° и 3° будет

$$\begin{aligned} \sum_j (\varphi_{nj}(t) - 1) &= \sum_j \int (e^{it(x^2-x)} - 1) dF_{nj} \\ &= \sum_j \int (e^{it(x^2-x)} - 1 - it(x^2-x)) dF_{nj} + it. \end{aligned}$$

Выберем τ так, чтобы $0 < \tau < \frac{1}{2}$ и разобьем $(-\infty, \infty)$ на интервалы $(-\infty, -\tau>$, $(-\tau, 1-\tau>$, $(1-\tau, 1+\tau)$, $(1+\tau, \infty)$. В первом и четвертом подинтегральное выражение не может быть больше $2|t|(x^2-x)$, во втором и третьем — $\frac{1}{2}t^2x^2(x-1)^2$. Следовательно

$$|\Sigma_j \int (e^{it(x^2-x)} - 1 - it(x^2-x)) dF_{nj}| \leq (2|t|(1+\tau^{-1}) + 2|t| + 2t^2) \Sigma_j \int_{|x-1|>\tau} x^2 dF_{nj} + \frac{1}{2}t^2\tau^2.$$

Выберем сначала τ так, чтобы $\frac{1}{2}t^2\tau^2 < \frac{1}{2}\varepsilon > 0$, тогда по предположению и по теореме Гнеденко о распределении Пуассона можно выбрать n настолько большим, чтобы и первый член правой части был $< \frac{1}{2}\varepsilon$. Следовательно имеет место (4).

IV. Условие достаточно. Пусть имеет место (4). Докажем, что тогда соблюдено условие Линдеберга:

для любого $T > 0$ будет $\lim \Sigma_j \int_{|x-1|>T} x^2 dF_{nj} = 0$.

Согласно 1° и 3° будет

$$\Sigma_j(\varphi_{nj}(t) - 1) - it = \Sigma_j \int (e^{it(x^2-x)} - 1 - it(x^2-x)) dF_{nj}.$$

Согласно (4) получим (отделением действительной части от мнимой)

$$\Sigma_j \int (\cos t(x^2-x) - 1) dF_{nj} \rightarrow 0, \quad (5)$$

$$\Sigma_j \int (t(x^2-x) - \sin t(x^2-x)) dF_{nj} \rightarrow 0. \quad (6)$$

Перепишем (5) в виде

$$\Sigma_j \int \sin^2 t(x^2-x) dF_{nj} \rightarrow 0. \quad (7)$$

Теперь существует постоянная $\tau > 0$ такая, что $x - \sin x + \sin^2 x \geq \frac{1}{2}x^2$, если $|x| < \tau$ и поэтому

$$t(x^2-x) - \sin t(x^2-x) + \sin^2 t(x^2-x) \geq \frac{1}{2}t^2x^2(x-1)^2$$

для $|t(x^2-x)| < \tau$.

Так как для всех x имеет место $x^2 - x \geq -\frac{1}{4}$, при $0 < t < 4\tau$ остается только $t(x^2-x) \geq \tau$ и тогда будет

$$t(x^2-x) - \sin t(x^2-x) \geq \alpha t(x^2-x)$$

и $\alpha > 0$ — также постоянная. Пусть далее $t < 1$. Существует $\delta > 0$ такое, что из $t(x^2-x) \geq \tau$ следует, что x не входит ни в интервал $\langle -\delta, \delta \rangle$, ни в интервал $\langle 1-\delta, 1+\delta \rangle$. Отсюда видно, что в области $t(x^2-x) \geq \tau$ будет $\alpha t(x^2-x) \geq \beta tx^2$, где $\beta > 0$ — постоянная.

Выберем при данном T такое t , чтобы область $|t(x^2-x)| < \tau$ содержала интервал $\langle 1-T, 1+T \rangle$. Теперь имеем

$$\begin{aligned} \Sigma_j \int \{t(x^2-x) - \sin t(x^2-x) + \sin^2 t(x^2-x)\} dF_{nj} &= \\ &= \Sigma_j \left(\int_{|t(x^2-x)| < \tau} + \int_{t(x^2-x) \geq \tau} \right) \{ \dots \} \geq \\ &\geq \Sigma_j \left(\int_{\substack{|t(x^2-x)| < \tau \\ |x-1| > T}} + \int_{t(x^2-x) \geq \tau} \right) \{ \dots \} \geq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq \sum_j (\frac{1}{2} t^2 T^2 \int_{\substack{|t(x^2-x)| < \tau \\ |x-1| > T}} x^2 dF_{nj} + \beta t \int_{t(x^2-x) \geq \tau} x^2 dF_{nj}) \geq \\ &\geq \gamma(t, T) \sum_j \int_{|x-1| > T} x^2 dF_{nj}, \end{aligned}$$

$\gamma(t, T) > 0$, откуда согласно (6) и (7) вытекает (4). *гармоническое распределение*

Summary.

A note on Poisson's distribution.

VÁCLAV ALDA, Praha.

(Received February 25th, 1952.)

The aim of this paper is to prove the following theorem: Let $\xi_{n1}, \dots, \dots, \xi_{nk_n}$ ($n = 1, 2, \dots$) be a normed elementary system (conditions 1°—4° of the paper) of random variables. Then a necessary and sufficient condition for the convergence of the distribution of the sum $\xi_{n1} + \dots + \xi_{nk_n}$ to Poisson's distribution is the convergence in probability of $(\xi_{n1}^2 - \xi_{n1}) + \dots + (\xi_{nk_n}^2 - \xi_{nk_n})$ to one.

ЛИТЕРАТУРА.

- [1] Райков Д. А.: О связи между центральным предельным законом теории вероятностей и законом больших чисел. Изв. А. Н. СССР, серия мат., 1938, 323—336. (Реферат: Zentralblatt, 19 (1939), 224.)
- [2] Glivenko V. I.: Theorie pravděpodobnosti, český překlad. Praha 1950