Czechoslovak Mathematical Journal

Ján Jakubík

О отношениях конгруэнтности на абстрактных алгебрах

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 4 (1954), No. 4, 314–317

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100119

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1954

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

Чехословацкий математический журнал, т. 4 (79) 1954

О ОТНОШЕНИЯХ КОНГРУЭНТНОСТИ НА АБСТРАКТНЫХ АЛГЕБРАХ

ЯН ЯКУБИК (Ján Jakubík), Кошице

(Поступило в редакцию 15/V 1954 г.)

Г. Биркгоф выдвинул проблему ([1], проблема 33), касающуюся дополнительных соотношений конгруэнтности на абстрактных алгебрах. В настоящей заметке на простом примере доказывается, что ответ на поставленный в упомянутой проблеме вопрос положителен.

Выражениями алгебра, подалгебра, соотношение конгруэнтности мы будем пользоваться в том же смысле, как и в книге [1].[1]) Если R — соотношение конгруэнтности в алгебре A и если элементы $x, y \in A$ конгруэнтны по соотношению R, то мы будем писать xRy. Каждое соотношение конгруэнтности (взаимно однозначно) определяется соответствующим разбиением множества A; такое разбиение мы будем называть производящим разбиением в обозначать той же буквой, как и рассматриваемое соотношение конгруэнтности.

Соотношения конгруэнтности R, R' на A мы называем дополнительными,[2] если для любой пары $a, b \in A$ из справедливости соотношений

$$aRx,\ xR'b$$

вытекает существование элемента $y \in A$, для которого имеет место

$$aR'y\,,\quad yR'b\,.$$

В таком случае мы будем также говорить, что производящие разбиения R, R' дополнительны. Разбиение множества A, содержащее всего лишь один класс, мы будем называть наибольшим и обозначать через R_1. Разбиение множества A, в котором каждый класс содержит только один элемент, мы называем наименьшим разбиением и обозначаем через R_0. Очевидно, имеют место утверждения 1. разбиения R_0, R_1 являются про-

[1]) См. алгебраическую часть введения к упомянутой книге.

[2]) В русском переводе книги [1] такие соотношения конгруэнтности названы перестановочными.

изводящими, 2. разбиение $R_0(R_1)$ является дополнительным с каждым производящим разбиением на A.

Пусть S — подалгебра в алгебре A, содержащая один элемент („одноэлементная подалгебра"), пусть R — производящее разбиение на алгебре A. Класс разбиения R, который содержит элемент, лежащий в подалгебре S, мы обозначим через $S(R)$.

Г. Биркгоф выдвинул следующую проблему ([1], Проблема 33):

Пусть A — алгебра с одноэлементной подалгеброй и дополнительными производящими разбиениями. Может ли алгебра A иметь соотношения конгруэнтности R, R', $R \neq R'$, для которых имеет место $S(R) = S(R')$?

Рассмотрим следующий пример:

Пусть G — группа, содержащая хотя бы два элемента. Предположим, что ни один из элементов группы G не обозначен символом 0. Образуем множество $A = G \cup \{0\}$ и определим для любой упорядоченной пары элементов $x, y \in A$ их произведение $x_0 y$ следующим образом:

если $x, y \in G$, то пусть $x_0 y = xy$ (выражение в правой части означает произведение в G);

если же хоть один из элементов x, y равен 0, то пусть $x_0 y = 0$.

Исследуем производящие разбиения этого группоида A.

1. Пусть r — производящее разбиение на G. Образуем разбиение R множества A таким образом: Пусть элемент 0 образует особый класс. Пусть разбиение множества G на классы одинаково как в R, так и в разбиении r. Очевидно, R будет производящим разбиением на A. Образованные таким образом разбиения множества A мы назовем разбиениями типа G. Разбиение R_0 на A будет, очевидно, также разбиением типа G.

2. Кроме разбиений типа G и разбиения R_1 на A не существует никаких других производящих разбиений.

Доказательство: Пусть R — произвольное производящее разбиение на A. Если элемент 0 образует особый класс, нетрудно убедиться, что разбиение R будет типа G. Если же элемент 0 не образует особого класса, то существует элемент $x \in G$, для которого имеет место $xR0$. (1) Пусть $y \in G$. Из соотношения (1) следует

$$y = [(yx^{-1})_0\, x]\, R[(yx^{-1})_0\, 0] = 0\,,$$

откуда $R = R_1$. Утверждение доказано.

3. Так как G — группа, то все производящие разбиения на G дополнительны. Из 1., 2. тогда очевидно вытекает, что все производящие разбиения на A дополнительны.

Пусть R_2 — производящее разбиение на A, имеющее классы $\{0\}$, G. Обозначим $S = \{0\}$. Очевидно, S будет одноэлементной подалгеброй в A. Имеет место $R_2 \neq R_0$ и одновременно $S(R_2) = S(R_0)$.

Простейший пример такого рода мы получим в том случае, когда рассматриваемая группа G имеет два элемента. Соответствующий группоид равен с точностью до изоморфизма группоиду $A = \{0, 1, 2\}$, в котором умножение определено, как умножение соответствующих чисел по mod 3. Единственным нетривиальным производящим разбиением является $R_2 = \{\{0\}, \{1, 2\}\}$. Если $S = \{0\}$, тогда $R_2 \neq R_0$, $S(R_2) = S(R_0)$.

Отсюда следует

Теорема. *Существует алгебра A с одноэлементной подалгеброй S такая, что*

1. *все соотношения конгруэнтности на A дополнительны,*

2. *существуют соотношения конгруэнтности R, R' на A, для которых имеет место*

$$S(R) = S(R'), \quad R \neq R'.^{3)}$$

Замечание. В предыдущем примере элемент одноэлементной подалгебры S не является „единицей". Требования проблемы 33 можно сделать более сильными, если предположить, что A — групоид и элемент подалгебры S — двусторонняя единица в A. В этом случае ответ на поставленный вопрос тоже положительный, как показывает следующий пример:

Пусть G — простой групоид (т. е. такой, на котором не существует нетривиальное отношение конгруэнтности), пусть для каждого $x \in G$ $xx \neq x$, пусть G имеет более одного элемента. (Как пример может служить $G = \{2, 3\}$ с таблицей умножения

	2	3
2	3	2
3	3	2

.)

Предположим, что $1 \bar{\in} G$. Определим на множестве $A = \{1\} \cup G$ умножение $x_0 y$ как следует: если $x, y \in G$, положим $x_0 y = xy$; для каждого $x \in A$ положим $1_0 x = x_0 1 = x$. Пусть $R_2 = \{\{1\}, G\}$. Очевидно, что R_2 — производящее разбиение множества A. R_2 — единственное нетривиальное отношение конгруэнтности на A.

Доказательство: Пусть R — отношение конгруэнтности на A. Если в R $xR1 \Rightarrow x = 1$, потом $R = R_0$ или $R = R_2$. Если существует $x \in A$, $x \neq 1$, $xR1$, потом $x = 1_0 x R x_0 x = xx$, т. е. $xRxx$. Следовательно, для каждого $y \in G$ $1Ry$, т. е. $R = R_1$. Из этого вытекает, что все отношения конгруэнтности на A дополнительны. Пусть $S = \{1\}$. Имеет место $R_2 \neq R_0$, $S(R_2) = S(R_0)$.

---

[3]) Замечание при корректуре. Исследуемая проблема Г. Биркгофа была решена тоже в статье *А. И. Мальцева* „К общей теории алгебраических систем" (Матем. сборник, 35 (77):1; номер журнала вышел в августе 1954). Пример А. И. Мальцева есть алгебра с тремя элементами и одной тернарной операцией.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Garret Birkhoff:* Lattice theory (American Mathem. Society. Colloquium publications Vol. XXV). Русский перевод (Издат. И. Л., Москва, 1952).

Summary

CONGRUENCE RELATIONS ON ABSTRACT ALGEBRAS

JÁN JAKUBÍK, Košice.

(Received May 15, 1954.)

Let A be abstract algebra, let S be subalgebra of A, containing only one element ("one — element subalgebra"), let R be a congruence relation on A (see [1], foreword on algebra). The class in the partition of A, determined by the relation R, which contain the element of S we denote by $S(R)$. By a simple example is proved the folowing statement:

There exists an algebra A with a one-element subalgebra S with the following properties: 1. all congruence relations on A are permutable and 2. there exist congruence relations R, R' on A such that $R \neq R'$, $S(R) = S(R')$.

This solves a problem of G. Birkhoff ([1], problem 33).