Czechoslovak Mathematical Journal

Miloš Zlámal

Eine Bemerkung über die charakteristische Determinante einer Eigenwertaufgabe

*Czechoslovak Mathematical Journal*, Vol. 5 (1955), No. 2, 175–179

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100140

**Terms of use:**

© Institute of Mathematics AS CR, 1955

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

Чехословацкий математический журнал, т. 5 (80) 1955

# EINE BEMERKUNG ÜBER DIE CHARAKTERISTISCHE DETERMINANTE EINER EIGENWERTAUFGABE

MILOŠ ZLÁMAL, Brno.

(Eingelangt 12. VII. 1954.)

Wir untersuchen die Ordnung der charakteristischen Determinante einer willkürlichen Eigenwertaufgabe bei der linearen Differentialgleichung $n$-ter Ordnung.

Betrachten wir die Eigenwertaufgabe

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)\, y = \lambda[b_k(x)\, y^{(k)} + \ldots + b_0(x)\, y]\,;\; n > k\,, \quad (1)$$

$$U_\nu(y) = \sum_{i=0}^{n-1} [\alpha_\nu^i\, y^{(i)}(a) + \beta_\nu^i\, y^{(i)}(b)] = 0\,, \quad \nu = 1, \ldots, n\,, \quad (2)$$

wo wir ausser der üblichen Voraussetzung über die Stetigkeit der Koeffizienten $a_\nu(x)$ und $b_\nu(x)$ nichts weiteres voraussetzen, wo also besonders die Randbedingungen (2) willkürlich sind. Es seien $y_1(x, \lambda), \ldots, y_\nu(x, \lambda)$ die Lösungen von (1) mit den Anfangswerten

$$y_s^{(q)}(a) = \mathrm{e}_{s,q+1}{}^{1)} \quad (s = 1, \ldots, n,\; q = 0, \ldots, n-1)\,. \quad (3)$$

Dann ist die charakteristische Determinante

$$\Delta(\lambda) = \mathrm{Det}\, |U_r(y_s)| \quad (r, s = 1, \ldots, n)$$

eine ganze Funktion des Parameters $\lambda$ und bezüglich ihrer Ordnung $\varrho$ beweisen wir den

Satz: *Es seien $a_\nu(x)$ und $b_\nu(x)$ stetige Funktionen im Intervall $\langle a, b\rangle$ und $\alpha_\nu^i$, $\beta_\nu^i$ Polynome des Parameters $\lambda$. Dann ist die charakteristische Determinante $\Delta(\lambda)$ der Eigenwertaufgabe* (1), (2) *eine ganze Funktion der Ordnung*

$$\varrho \leqq \frac{1}{n-k}\,.$$

[1]) $\mathrm{e}_{ij}$ ist das Kroneckersche Symbol, d. h. $\mathrm{e}_{ij} = 0$ für $i \neq j$, $\mathrm{e}_{ii} = 1$.

Beweis: Führen wir die Bezeichnungen $M_\nu \geqq \max\limits_{x \in \langle a,b \rangle} |a_\nu(x)|$, $\overline{M}_\nu \geqq \max\limits_{x \in \langle a,b \rangle} |b_\nu(x)|$ ein und betrachten die Differentialgleichung

$$z^{(n)} - M_{n-1} z^{(n-1)} - \ldots - M_{k+1} z^{(k+1)} - (M_k + |\lambda| \overline{M}_k) z^{(k)} - \ldots - \\ - (M_0 + |\lambda| \overline{M}_0) z = 0 . \tag{4}$$

Wenn $z_s(x)$ eine durch die Anfangswerte (3) bestimmte Lösung dieser Gleichung ist, dann gilt nach einem Hilfssatz (siehe [1], S. 298 Hilfssatz 2)

$$|y_s^{(q)}(x, \lambda)| \leq z_s^{(q)}(x, |\lambda|) \quad (q = 0, \ldots, n-1) . \tag{5}$$

Zuerst zeigen wir, dass $y_s(x, \lambda)$ und ihre Ableitungen bis zu der $(n-1)$-ten Ordnung als ganze Funktionen des Parameters $\lambda$ die Ordnung $\varrho$ haben, welche kleiner oder gleich $\dfrac{1}{n-k}$ ist. Nach (5) genügt es zu beweisen, dass die Lösungen $z_s(x, |\lambda|)$ und ihre zugehörigen Ableitungen als ganze Funktionen in $|\lambda|$ die Ordnung $\varrho \leq \dfrac{1}{n-k}$ haben.

Betrachten wir die charakteristische Gleichung von (4)

$$\alpha^n - \ldots - M_{k+1} \alpha^{k+1} - (M_k + |\lambda| \overline{M}_k) \alpha^k - \ldots - (M_0 + |\lambda| \overline{M}_0) = 0 . \tag{6}$$

Der absolute Betrag der Wurzeln $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ von (6) ist nicht grösser als die einzige positive Wurzel dieser Gleichung. Nach dem Cauchyschen Kriterium ist diese positive Wurzel kleiner oder gleich

$$\max \{ (nM_{n-1})^1, \ldots, (nM_{k+1})^{\frac{1}{n-k-1}}, [n(M_k + |\lambda| \overline{M}_k)]^{\frac{1}{n-k}}, \ldots, [n(M_0 + |\lambda| \overline{M}_0)]^{\frac{1}{n}} \} .$$

Für genügend grosse $|\lambda|$ ist dieses Maximum gleich

$$[n(M_k + |\lambda| \overline{M}_k)]^{\frac{1}{n-k}} \leq c_1 |\lambda|^{\frac{1}{n-k}} ,$$

wo $c_1$ eine hinreichend grosse positive Konstante ist, sodass

$$|\alpha_j| \leq c_1 |\lambda|^{\frac{1}{n-k}} \quad (j = 1, \ldots, n) .$$

Die Diskriminante der charakteristischen Gleichung (6) ist ein Polynom in $|\lambda|$. Deshalb ist sie für hinreichend grosse $|\lambda|$ von Null verschiedenen,[2]) sodass alle Wurzeln von (6) einfach sind. Das Fundamentalsystem besteht also aus den Lösungen der Form

$$u_j(x, \lambda) = e^{\alpha_j (x-a)} \quad (j = 1, \ldots, n) .$$

[2]) Es ist freilich notwendig zu zeigen, dass sie nicht identisch gleich Null, dass sie z. B. für $\lambda = 1$ verschieden von Null ist. Dies folgt aber daraus, dass wir die Konstanten $M_\nu$ und $\overline{M}_\nu$ mit grosser Willkürlichkeit wählen können, denn $M_\nu$ und $\overline{M}_\nu$ brauchen nur die Ungleichungen $\overline{M}_\nu \geq \max |a_\nu(x)|$, $\overline{M}_\nu \geq \max |b_\nu(x)|$ zu erfüllen.

Die Lösungen $z_s(x, \lambda)$ sind lineare Kombinationen von $u_j(x, \lambda)$. Die Koeffizienten $c_{ij}$ diser Kombinationen sind Brüche, in deren Nenner die Wronskische Determinante steht und dessen Zähler ein Polynom in $u_1(a, \lambda)$, $u_1'(a, \lambda)$, ..., $u_n(a, \lambda)$, ..., $u_n^{(n-1)}(a, \lambda)$, d. h. ein Polynom in $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ist. Es gilt offenbar

$$W(a, \lambda) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_2^{n-1} \\ & \cdot & & \cdot \\ & \cdot & & \cdot \\ & \cdot & & \cdot \\ 1 & \alpha_n & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

sodass $W^2(a, \lambda)$ gleich der Diskriminante von (6), also ein Polynom in $|\lambda|$ ist und $\frac{1}{W(a, \lambda)} \to 0$ für $|\lambda| \to \infty$. Daraus ist zu ersehen, dass die Koeffizienten $c_{ij}$ im absoluten Betrage kleiner als $|\lambda|^p$ sind, wo $p$ ein hinreichend grosser Exponent ist. Und weil $|u_j^{(q)}(x, \lambda)| \leqq e^{c|\lambda|^{\frac{1}{n-k}}}$, sind wirklich $z_s(x, |\lambda|)$ und ihre Ableitungen der Ordnung, welche kleiner oder gleich $\frac{1}{n-k}$ ist.

Die Elemente der Determinante $\Delta(\lambda)$ sind gleichfalls ganze Funktionen der Ordnung kleiner oder gleich $\frac{1}{n-k}$, weil die Koeffizienten $\alpha_\nu^i$, $\beta_\nu^i$ Polynome in $\lambda$ sind. Also auch die Ordnung der Determinante $\Delta(\lambda)$ is kleiner oder gleich $\frac{1}{n-k}$.

**Korollar 1:** *Es gelten die Voraussetzungen des Satzes. Wenn*

$$n > k + 1\,, \tag{7}$$

*dann entweder hat die Eigenwertaufgabe* (1), (2) *unendlich viele Eigenwerte oder ist die charakteristische Determinante ein Polynom.*

Beweis: Die Eigenwerte sind gerade alle Nullstellen der charakteristischen Determinante. Nach dem Satz gilt

$$\varrho \leq \frac{1}{n-k} < 1$$

mit Rücksicht auf (7), wo $\varrho$ die Ordnung von $\Delta(\lambda)$ ist. Wenn unsere Eigenwertaufgabe nicht unendlich viele Eigenwerte hat, muss $\varrho = 0$, denn andererseits wäre $\varrho$ keine ganze Zahl und dann müsste $\Delta(\lambda)$ als eine ganze Funktion einer nichtganzzahligen Ordnung unendlich viele Nullstellen haben. Die einzige Funktion der nullten Ordnung, welche endlich viele Nullstellen besitzt, ist aber das Polynom.

**Korollar 2:** *Es gelten die Voraussetzungen des Satzes und es bilden die Eigenwerte der Eigenwertaufgabe* (1), (2) *eine unendliche Folge*

$$0 \leq |\lambda_0| \leq |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \ldots$$

*Dann gilt für jedes* $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{|\lambda_\nu|} = o\left(\frac{1}{\nu^{\frac{n-k}{1+\varepsilon}}}\right).$$

Beweis: Für jedes $\varepsilon > 0$ konvergiert die Reihe $\sum \frac{1}{|\lambda_\nu|^{\frac{1}{n-k}+\varepsilon}}$, d. h. auch die Reihe $\sum \frac{1}{|\lambda_\nu|^{\frac{1+\varepsilon}{n-k}}}$. Die Glieder dieser Reihe bilden eine monotone Folge. Deshalb

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{\nu}{|\lambda_\gamma|^{\frac{1+\varepsilon}{n-k}}} = 0\,,$$

also auch

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{\nu^{\frac{n-k}{1+\varepsilon}}}{|\lambda_\nu|} = 0\,.$$

## LITERATURVERZEICHNIS


[1] *O. Perron:* Über die Entwickelbarkeit der Integrale von Differentialgleichungen nach Potenzen eines Parameters und der Anfangswerte (Math. Annalen B. *113*, 1937, S. 292—303).


## Резюме.

## ЗАМЕЧАНИЕ О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОМ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕ КРАЕВОЙ ПРОБЛЕМЫ


МИЛОШ ЗЛАМАЛ (Miloš Zlámal), Брно.



(Поступило в редакцию 12/VII 1954 г.)


Рассмотрим общую краевую проблему

$$y^n + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)\, y = \lambda[b_k(x)\, y^{(k)} + \ldots + b_0(x)\, y]\,,\ n > k\,, \quad (1)$$

$$U_\nu(y) = \sum_{i=0}^{n-1} [\alpha_\nu^i y^{(i)}(a) + \beta_\nu^i y^{(i)}(b)] = 0\,, \quad \nu = 1, \ldots, n\,. \quad (2)$$

Характеристический определитель этой проблемы является целой функцией; относительно ее порядка $\varrho$ мы доказываем следующую

**теорему:** *Пусть $a_\nu(x)$, $b_\nu(x)$ — непрерывные функции в интервале $\langle a, b\rangle$ и $\alpha_\nu^i$, $\beta_\nu^i$ — полиномы от $\lambda$. Тогда характеристический определитель краевой проблемы (1), (2) будет целой функцией порядка*

$$\varrho \leq \frac{1}{n-k}.$$

Из этой теоремы следует, что в случае $n > k + 1$ или краевая проблема (1), (2) имеет бесконечное количество собственных значений или характеристический определитель является полиномом. Далее из нее вытекает асимптотическая формула

$$\lambda_\nu = o\left(\frac{1}{\nu^{\frac{1}{n-k}+\varepsilon}}\right),$$

где $\varepsilon$ — сколь угодно малое положительное число.