Czechoslovak Mathematical Journal

Eduard Čech

Détermination du type différentiel d'une courbe de l'espace à deux, trois ou quatre dimensions

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 7 (1957), No. 4, 599–631

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100270

Чехословацкий математический журнал, т. 7 (82) 1957, Прага

DÉTERMINATION DU TYPE DIFFÉRENTIEL D'UNE COURBE DE L'ESPACE À DEUX, TROIS OU QUATRE DIMENSIONS

EDUARD ČECH, Prague.

(Reçu le 2 mai 1957.)

Une courbe C de l'espace euclidien E_n étant donnée moyennant les coefficients des formules de Frenet on se demande quelles sont les classes différentielles du point mobile de C, de la tangente, du plan osculateur ... pour tous les choix possibles du paramètre dont dépend la position du point mobile de C. Le Mémoire présent donne la résolution complète de ce problème pour $n = 2$, $n = 3$ et $n = 4$. Les résultats relatifs au cas $n = 3$ ont été énoncés dans une communication lue au Congrès de Bucarest juin 1956.

1. Introduction. La notion de *classe* (*différentielle*) d'une fonction $f = f(t)$, désignée par $\mathrm{cl}\, f$, peut être définie comme suit: $\mathrm{cl}\, f \geqq 0$ veut dire que f est continue; $\mathrm{cl}\, f \geqq 1$ veut dire que la dérivée $f'(t)$ existe et est continue; $\mathrm{cl}\, f \geqq r + 1$ veut dire que $\mathrm{cl}\, f' \geqq r$; on a $\mathrm{cl}\, f = \infty$ si $\mathrm{cl}\, f \geqq r$ pour chaque r naturel; on a $\mathrm{cl}\, f = r$ $(= 0, 1, 2, \ldots)$ si l'on a $\mathrm{cl}\, f \geqq r$, la relation $\mathrm{cl}\, f \geqq r + 1$ étant fausse. Ceci définit la classe de chaque fonction continue scalaire; la classe d'une fonction vectorielle est la valeur minima des classes de ses composantes.

Je considère dans l'espace E_n une courbe C lieu du point mobile $X = X(t)$. Je dis que C est régulière (et que le paramètre t est régulier) si $\mathrm{cl}\, X \geqq 1$ et s'il existe un système orthonormal de vecteurs $e_i = e_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ et un système de fonctions scalaires $K_j = K_j(t)$ $(j = 0, 1, \ldots, n - 1)$ tels que $\mathrm{cl}\, e_i \geqq 1$, $\mathrm{cl}\, K_j \geqq 0$, $K_j \neq 0$ pour chaque t, et qu'on ait les formules de Frenet

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = K_0 e_1 , \tag{1.1}$$

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}t} = K_1 e_2 , \quad \frac{\mathrm{d}e_2}{\mathrm{d}r} = - K_1 e_1 + K_2 e_3, \ldots, \\ \frac{\mathrm{d}e_{n-1}}{\mathrm{d}t} = - K_{n-2} e_{n-2} + K_{n-1} e_n , \quad \frac{\mathrm{d}e_n}{\mathrm{d}t} = - K_{n-1} e_{n-1} .\end{gathered} \tag{1.2}$$

$\left(\text{Pour } n = 2, \text{les (1.2) sont } \frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}t} = K_1 e_2, \frac{\mathrm{d}e_2}{\mathrm{d}t} = -K_1 e_1.\right)$ La courbe C possède alors pour chaque t une tangente T_1, un plan osculateur $T_2, \ldots$, un E_{n-1} osculateur T_{n-1} qui sont tous (ainsi que le point X) de classe $\geqq 1$.

Les hypothèses que nous avons faites sur la nature de C sont vérifiées en particulier si cl $X \geqq n$ et si

$$\left[\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2} \cdots \frac{\mathrm{d}^nX}{\mathrm{d}t^n}\right] \neq 0$$

pour chaque t; dans ce cas particulier, on a cl $K_j \geqq n - j - 1$ pour $0 \leqq j \leqq n - 1$. Cependant pour notre but il vaut mieux ne supposer que cl $K_j \geqq 0$. Remarquons aussi que nos hypothèses restent remplies en passant à une transformée projective ou dualistique de C.

L'objet du Mémoire présent est l'étude de la *classe différentielle de la courbe* C qui est par définition la suite finie

$$(\text{cl } X, \text{cl } T_1, \ldots, \text{cl } T_{n-1}) . \tag{1.3}$$

Les propriétés suivantes de la suite (1.3) sont aisées à prouver. Si un terme de (1.3) est ∞, tous les termes sont ∞; *ce cas banal sera exclu dans ce qui suit. La différence de deux termes successifs de la suite* (1.3) *ne peut avoir qu'une des trois valeurs* 0, 1, —1; nous nous servirons à maintes reprises de cette propriété importante. Il est aussi évident que

$$\begin{aligned}
\text{cl } T_1 &= \min(\text{cl } e_1, \text{cl}[Xe_1]) , \\
\text{cl } T_2 &= \min(\text{cl}[e_1, e_2], \text{cl}[Xe_1e_2]) , \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\text{cl } T_{n-2} &= \min(\text{cl}[e_1e_2 \ldots e_{n-2}], \text{cl}[Xe_1e_2 \ldots e_{n-2}]) , \\
\text{cl } T_{n-1} &= \min(\text{cl } e_n, \text{cl } X \,.\, e_n) .
\end{aligned} \tag{1.4}$$

La classe différentielle (1.3) dépend du choix du paramètre régulier t. Si $\tau = \tau(t)$, t étant un paramètre régulier, alors τ est un paramètre régulier si et seulement si cl $\tau(t) \geqq 1$ et, en outre, $\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} \neq 0$ pour chaque t. On voit sans peine si, pour un choix particulier du paramètre régulier t, on a

$$\max(\text{cl } X, \text{cl } T_1, \ldots, \text{cl } T_{n-1}) = m ,$$

alors *la classe* (1.3) *reste inaltérée en passant à une autre paramètre régulier* τ *si et seulement si* cl $\tau(t) \geqq m$.

Ceci étant, considérons les paramètres réguliers distingués

$$s = \int K_0 \,\mathrm{d}t, \sigma_1 = \int K_1 \,\mathrm{d}t, \ldots, \sigma_{n-1} = \int K_{n-1} \,\mathrm{d}t \tag{1.5}$$

qui sont manifestement indépendants du choix du paramètre régulier initial t et dont on pourrait facilement énoncer des définitions géométriques. Il est manifeste que les rapports mutuels des quantités $K_0, K_1, \ldots, K_{n-1}$ restent inaltérés en passant d'un paramètre régulier à un autre; en particulier, pour $t = s$ on a

$$K_0 = 1 \,, \quad K_1 = k_1, \ldots, K_{n-1} = k_{n-1} \,,$$

où $k_1, \ldots, k_{n-1}$ sont respectivement la première, ..., $(n-1)$-ème courbure de C; pour $t = \tau_i$ $(1 \leqq i \leqq n-1)$ on a

$$K_0 = \frac{1}{k_i} \,, \quad K_i = 1 \,, \quad K_j = \frac{k_j}{k_i} \quad \text{pour} \quad 0 \leqq j \leqq n-1, \ j \neq i \,.$$

On voit sans peine que *le nombre* cl X *atteint sa valeur maxima pour* $t = s$ et que, *pour* $1 \leqq i \leqq n-1$, cl T_i *atteint sa valeur maxima pour* $t = \sigma_i$.

Il est manifeste que, le paramètre t étant donné, *la classe* (1.3) *ne change pas si l'on transforme C moyennant une projectivité. Si* $(r_0, r_1, \ldots, r_{n-1})$ *est la classe de C, alors celle de ses transformées dualistiques est* $(r_{n-1}, \ldots, r_1, r_0)$.

Si le choix du paramètre n'est pas préscrit, il convient d'introduire la notion de *type différentiel* de C, ceci étant défini comme l'ensemble des classes différentielles relatives aux choix successifs $t = s$, $t = \sigma_1, \ldots, t = \sigma_{n-1}$. Le type différentiel n'est d'ailleurs pas toujours invariant envers les projectivités; v. mon mémoire *Classe différentielle des courbes. Section et projections* (à paraître dans la Revue de Mathématiques pures et appliquées, Bucarest, vol. 2, 1957).

Dans ce qui suit nous résoudrons, sucessivement pour $n = 2$, $n = 3$ et $n = 4$, en premier lieu le problème de la détermination de la classe différentielle de C (pour un paramètre régulier t donné) en supposant connus les nombres cl K_i $(0 \leqq i \leqq n-1)$, et en second lieu le problème de la détermination du type différentiel de C en supposant connues les classes des courbures $k_1, \ldots, k_{n-1}$ en tant que fonctions d'un paramètre choisi convenablement parmi les paramètres distingués (1.5). Rappelons encore que nous passons sous silence le cas banal où les nombres (1.3) sont infinis.

2. Cas $n = 2$. Nous allons voir que, *si*

$$\text{cl}\, K_0(t) = r_0 \geqq 0 \,, \quad \text{cl}\, K_1(t) = r_1 \geqq 0 \,, \tag{2.1}$$

alors on a

(1) *pour* $r_0 \geqq r_1 + 1$: cl $X(t) = r_1 + 2$, cl $T_1(t) = r_1 + 1$,

(2) *pour* $r_1 \geqq r_0 + 1$: cl $X(t) = r_0 + 1$, cl $T_1(t) = r_0 + 2$,

(3) *pour* $r_0 = r_1 = r$: cl $X(t) =$ cl $T_1(t) = r + 1$.

Observons d'abord que des équations

$$\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}t} = K_1 e_2 \,, \quad \frac{\mathrm{d}e_2}{\mathrm{d}t} = -K_1 e_1$$

on déduit tout de suite que cl $e_1 =$ cl $e_2 = r_1 + 1$. Ensuite, l'équation $\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = K_0 e_1$ montre que pour $r_0 \geqq r_1 + 1$ on a cl $X = r_1 + 2$, tandis que pour

$r_0 \leqq r_1$ on a cl $X = r_0 + 1$. Pour en conclure la validité de l'énoncé, il faut considérer encore les équations

$$\frac{\mathrm{d}[Xe_1]}{\mathrm{d}t} = K_1 \,.\, [Xe_2]\,, \quad \frac{\mathrm{d}[Xe_2]}{\mathrm{d}t} = K_0 - K_1[Xe_1]$$

qui montrent que pour $r_0 \geqq r_1$ on a cl$[Xe_1] \geqq r_1 + 1$, et pour $r_0 < r_1$ d'abord cl$[Xe_2] = r_0 + 1$, d'où cl$[Xe_1] \geqq r_0 + 2$ (il faut encore tenir compte de ce que cl $T_1 \leqq$ cl $X + 1$).

La classe différentielle de C étant ainsi déterminée en fonction des deux nombres (2.1), on détermine immédiatement le type différentiel en se rappelant que, pour $t = s$, on doit remplacer K_0, K_1 par 1, k_1, et pour $t = \sigma_1$ par $1|k_1$, 1. Donc, si cl $k_1(s) = r$, et par suite aussi cl $k_1(\sigma_1) = r$, puisque $\sigma_1 = \int k_1(s)\,\mathrm{d}s$, on a

$$\begin{aligned} &\text{pour } t = s\colon \ \text{cl } X = r + 2, \ \text{cl } T_1 = r + 1\,,\\ &\text{pour } t = \sigma_1\colon \ \text{cl } T = r + 1, \ \text{cl } T_2 = r + 2\,. \end{aligned} \tag{2.2}$$

3. Cas $n = 3$. Détermination de la classe différentielle. Des équations

$$\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}t} = K_1 e_2\,, \quad \frac{\mathrm{d}e_2}{\mathrm{d}t} = -\,K_1 e_1 + K_2 e_3\,, \quad \frac{\mathrm{d}e_3}{\mathrm{d}t} = -\,K_2 e_2 \tag{3.1}$$

on déduit que les classes différentielles des fonctions $K_1(t)$, $K_2(t)$ déterminent celles des vecteurs $e_1(t)$, $e_2(t)$, $e_3(t)$ selon le tableau suivant

K_1	K_2	e_1	e_2	e_3
r	r	$r+1$	$r+1$	$r+1$
$\geqq r+1$	r	$r+2$	$r+1$	$r+1$
r	$\geqq r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$

(3.2)

En effet, les équations (3.1) montrent immédiatement que, dans tous les cas, les classes de e_1, e_2, e_3 sont $\geqq r + 1$ et que cl $e_1 \geqq r + 2$ si cl $K_1 \geqq r + 1$ et cl $e_3 \geqq r + 2$ si cl $K_2 \geqq r + 1$.

Ceci étant, on a

$$-\,e_1 \frac{\mathrm{d}e_2}{\mathrm{d}t} = K_1\,, \quad e_3 \frac{\mathrm{d}e_2}{\mathrm{d}t} = K_2$$

d'où on déduit que cl $e_2 = r + 1$. Enfin, comme $|e_2| = 1$, on a

$$\text{cl}\left(\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}t}\right) = \min(\text{cl } K_1, \text{cl } e_2)\,, \quad \text{cl}\left(\frac{\mathrm{d}e_3}{\mathrm{d}t}\right) = \min(\text{cl } K_2, \text{cl } e_2)\,,$$

ce qui conduit aux valeurs de cl e_1, cl e_3 indiquées dans le tableau (3.2).

Pour déterminer la classe différentielle de C il faut ajouter à (3.1) l'équation

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = K_0 e_1\,. \tag{3.3}$$

Comme $|e_1| = 1$, on a

$$\mathrm{cl}\left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\right) = \min(\mathrm{cl}\, K_0, \mathrm{cl}\, e_1)\,. \tag{3.4}$$

Posons encore

$$X = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \tag{3.5}$$

de sorte que

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}\,t} = K_0 + K_1 x_2\,, \quad \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = -\,K_1 x_1 + K_2 x_3\,, \quad \frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t} = -\,K_2 x_2 \tag{3.6}$$

ainsi que

$$[Xe_2] = x_1 e_3 - x_3 e_1\,, \quad [Xe_1] = -\,x_2 e_3 + x_3 e_2\,, \quad Xe_3 = x_3\,. \tag{3.7}$$

Ceci étant, posons $\mathrm{cl}\, K_0 = r_0$ et considérons successivement les trois cas indiqués dans le tableau (3.2). Soit d'abord $\mathrm{cl}\, K_1 = \mathrm{cl}\, K_2 = r$, de sorte que $\mathrm{cl}\, e_1 = \mathrm{cl}\, e_2 = \mathrm{cl}\, e_3 = r + 1$. Selon (3.4) on a $\mathrm{cl}\, X = r + 2$ pour $r_0 \geqq r + 1$, $\mathrm{cl}\, X = r_0 + 1$ pour $r_0 \leqq r$. Pour $r_0 \geqq r$, on a $\mathrm{cl}\, X \geqq \mathrm{cl}\, e_1 = \mathrm{cl}\, e_3$, d'où $\mathrm{cl}[Xe_1] \geqq \mathrm{cl}\, e_1$, $\mathrm{cl}\, Xe_3 \geqq \mathrm{cl}\, e_3$ de sorte que, selon (1.4), $\mathrm{cl}\, T_1 = \mathrm{cl}\, T_2 = r + 1$. Pour $r_0 < r$ on déduit de (3.6) que les classes de x_1, x_2, x_3 sont $\geqq r_0 + 1$; (3.6_2) donne alors $\mathrm{cl}\, x_2 \geqq r_0 + 2$ et (3.6_3) donne $\mathrm{cl}\, x_3 = r_0 + 2$ si $r = r_0 + 1$ et $\mathrm{cl}\, x_3 \geqq r_0 + 3$ si $r \geqq r_0 + 2$. Comme $\mathrm{cl}\, e_3 = r + 1$, $\mathrm{cl}\, T_2 = \min(\mathrm{cl}\, e_3, x_3)$ [v. (1.4)], on obtient $\mathrm{cl}\, T_2 = r_0 + 2$ pour $r = r_0 + 1$, $\mathrm{cl}\, T_3 \geqq r_0 + 3$ pour $r \geqq r_0 + 2$. De (3.7_2) on déduit $\mathrm{cl}[Xe_1] \geqq r_0 + 2$ et comme on a aussi $\mathrm{cl}\, e_1 \geqq r_0 + 2$, on obtient $\mathrm{cl}\, T_1 \geqq r_0 + 2$. Or $\mathrm{cl}\, T_1 \leqq \mathrm{cl}\, X + 1$, $\mathrm{cl}\, X = r_0 + 1$, d'oú $\mathrm{cl}\, T_1 = r_0 + 2$ et par suite $\mathrm{cl}\, T_2 \leqq r_0 + 3$, d'oú $\mathrm{cl}\, T_2 = r_0 + 3$ pour $r \geqq r_0 + 2$. En résumé, on obtient pour $r_0 \geqq r + 1$

$$\mathrm{cl}\, X = r + 2\,, \quad \mathrm{cl}\, T_1 = r + 1\,, \quad \mathrm{cl}\, T_2 = r + 1\,,$$

pour $r_0 = r$

$$\mathrm{cl}\, X = r + 1\,, \quad \mathrm{cl}\, T_1 = r + 1\,, \quad \mathrm{cl}\, T_2 = r + 1\,,$$

pour $r = r_0 + 1$

$$\mathrm{cl}\, X = r_0 + 1\,, \quad \mathrm{cl}\, T_1 = r_0 + 2\,, \quad \mathrm{cl}\, T_2 = r_0 + 2\,,$$

pour $r \geqq r_0 + 2$

$$\mathrm{cl}\, X = r_0 + 1\,, \quad \mathrm{cl}\, T_1 = r_0 + 2\,, \quad \mathrm{cl}\, T_2 = r_0 + 3\,.$$

Passons au cas $\mathrm{cl}\, K_1 \geqq r + 1$, $\mathrm{cl}\, K_2 = r$, de sorte que $\mathrm{cl}\, e_1 = r + 2$, $\mathrm{cl}\, e_2 = \mathrm{cl}\, e_3 = r + 1$. Selon (3.4) on a $\mathrm{cl}\, X = r + 3$ pour $r_0 \geqq r + 2$, $\mathrm{cl}\, X = r_0 + 1$ pour $r_0 \leqq r + 1$. Pour $r_0 \geqq r$ on a donc $\mathrm{cl}\, X \geqq \mathrm{cl}\, e_2 = \mathrm{cl}\, e_3$, d'où $\mathrm{cl}\, Xe_3 \geqq r + 1$, $\mathrm{cl}[Xe_2] \geqq r + 1$ et par suite $\mathrm{cl}[Xe_1] \geqq r + 2$, car $\mathrm{cl}\, K_1 \geqq r + 1$, $\dfrac{\mathrm{d}[Xe_1]}{\mathrm{d}t} = K_1[Xe_2]$. Ceci donne [v. (1.4)]: pour $r_0 \geqq r + 2$

$$\mathrm{cl}\, X = r + 3\,, \quad \mathrm{cl}\, T_1 = r + 2\,, \quad \mathrm{cl}\, T_2 = r + 1\,,$$

pour $r_0 = r + 1$

$$\mathrm{cl}\, X = r + 2\,, \quad \mathrm{cl}\, T_1 = r + 2\,, \quad \mathrm{cl}\, T_2 = r + 1\,,$$

pour $r_0 = r$

$$\text{cl}\, X = r + 1\,, \quad \text{cl}\, T_1 = r + 2\,, \quad \text{cl}\, T_2 = r + 1\,.$$

Pour $r_0 < r$ on déduit de (3.6) que $\text{cl}\, x_1 = r_0 + 1$, $\text{cl}\, x_2 \geqq r_0 + 2$ et $\text{cl}\, x_3 = r_0 + 2$ si $r = r_0 + 1$, $\text{cl}\, x_3 \geqq r_0 + 3$ si $r \geqq r_0 + 2$; (3.7_2) donne $\text{cl}[Xe_1] \geqq r_0 + 2$. Faisant usage de (1.4) et en se rappelant que $\text{cl}\, T_1 \leqq \text{cl}\, X + 1$, $\text{cl}\, T_2 \leqq \text{cl}\, T_1 + 1$, on déduit que l'on a: pour $r = r_0 + 1$

$$\text{cl}\, X = r_0 + 1\,, \quad \text{cl}\, T_1 = r_0 + 2\,, \quad \text{cl}\, T_2 = r_0 + 2$$

pour $r \geqq r_0 + 2$

$$\text{cl}\, X = r_0 + 1\,, \quad \text{cl}\, T_1 = r_0 + 2\,, \quad \text{cl}\, T_2 = r_0 + 3\,.$$

Soit enfin $\text{cl}\, K_1 = r$, $\text{cl}\, K_2 \geqq r + 1$, de sorte que $\text{cl}\, e_1 = \text{cl}\, e_2 = r + 1$, $\text{cl}\, e_3 = r + 2$. Selon (3.4) on a $\text{cl}\, X = r + 2$ pour $r_0 \geqq r + 1$, $\text{cl}\, X = r_0 + 1$ pour $r_0 \leqq r$. Pour $r_0 \geqq r + 1$ on a $\text{cl}\, X \geqq \text{cl}\, e_3 > \text{cl}\, e_1$, d'ou $\text{cl}[Xe_1] \geqq \text{cl}\, e_1$, $\text{cl}\, Xe_3 \geqq \text{cl}\, e_3$ de sorte que (1.4) donne

$$\text{cl}\, X = r + 2\,, \quad \text{cl}\, T_1 = r + 1\,, \quad \text{cl}\, T_2 = r + 2\,.$$

Pour $r_0 = r$ les équations (3.6) montrent que les classes de x_1, x_2 sont $\geqq r + 1$ et que $\text{cl}\, x_3 \geqq r + 2$; on a donc de nouveau $\text{cl}[Xe_1] \geqq \text{cl}\, e_1$, $\text{cl}\, Xe_3 \geqq \text{cl}\, e_3$ de sorte que

$$\text{cl}\, X = r + 1\,, \quad \text{cl}\, T_1 = r + 1\,, \quad \text{cl}\, T_2 = r + 2\,.$$

Pour $r_0 < r$ on déduit de (3.6) que $\text{cl}\, x_1 = r_0 + 1$, $\text{cl}\, x_2 \geqq r_0 + 2$, $\text{cl}\, x_3 \geqq r_0 + 3$; ensuite on déduit de (3.7) que $\text{cl}[Xe_1] \geqq r_0 + 2$, $\text{cl} Xe_3 \geqq r_0 + 3$. Faisant usage de (1.4) et en se rappelant que $\text{cl}\, T_1 \leqq \text{cl}\, X + 1$, $\text{cl}\, T_2 \leqq \text{cl}\, T_1 + 1$, on voit que pour $r_0 < r$

$$\text{cl}\, X = r_0 + 1\,, \quad \text{cl}\, T_1 = r_0 + 2\,, \quad \text{cl}\, T_2 = r_0 + 3\,.$$

En résumant tous les résultats obtenus on arrive au tableau (3.8) qui exprime la classe différentielle de C moyennant les classes de K_0, K_1, K_2 (on y a changé un peu la signification de la lettre r).

K_0	K_1	K_2	X	T_1	T_2
r	r	r	$r+1$	$r+1$	$r+1$
$\geqq r+1$	r	r	$r+2$	$r+1$	$r+1$
r	$\geqq r+1$	r	$r+1$	$r+2$	$r+1$
r	r	$\geqq r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$
r	$\geqq r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+2$
r	$\geqq r+1$	$\geqq r+2$	$r+1$	$r+2$	$r+3$
$\geqq r+1$	r	$\geqq r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+2$
$r+1$	$\geqq r+1$	r	$r+2$	$r+2$	$r+1$
$\geqq r+2$	$\geqq r+1$	r	$r+3$	$r+2$	$r+1$

(3.8)

4. Cas $n = 3$. Détermination du type différentiel. Pour $t = s$ on doit remplacer, dans le tableau (3.8), les quantités K_0, K_1, K_2 respectivement par $1, k_1, k_2$, où k_1, k_2 sont la première et la seconde courbure de C. Ceci conduit au tableau (4.1).

$$\begin{array}{cc||c|c|c}
k_1(s) & k_2(s) & X(s) & T_1(s) & T_2(s) \\
r & r & r+2 & r+1 & r+1 \\
\geqq r+1 & r & r+3 & r+2 & r+1 \\
r & \geqq r+1 & r+2 & r+1 & r+2
\end{array} \tag{4.1}$$

Pour $t = \sigma_1$ on obtient le tableau (4.2).

$$\begin{array}{c|c||c|c|c}
k_1(\sigma_1) & \dfrac{k_1(\sigma_1)}{k_2(\sigma_1)} & X(\sigma_1) & T_1(\sigma_1) & T_2(\sigma_1) \\
r & r & r+1 & r+2 & r+1 \\
r+1 & r & r+2 & r+2 & r+1 \\
\geqq r+2 & r & r+3 & r+2 & r+1 \\
r & r+1 & r+1 & r+2 & r+2 \\
r & \geqq r+2 & r+1 & r+2 & r+3
\end{array} \tag{4.2}$$

Pour $t = \sigma_2$ on a le tableau (4.3).

$$\begin{array}{c|c||c|c|c}
k_2(\sigma_2) & \dfrac{k_1(\sigma_2)}{k_2(\sigma_2)} & X(\sigma_1) & T_1(\sigma_1) & T_2(\sigma_1) \\
r & r & r+1 & r+1 & r+2 \\
\geqq r+1 & r & r+2 & r+1 & r+2 \\
r & \geqq r+1 & r+1 & r+2 & r+3
\end{array} \tag{4,3}$$

Pour déterminer le type différentiel de C il faut combiner (4.1), (4.2), (4.3). Comme

$$\sigma_1 = \int k_1 \, ds \, , \quad \sigma_2 = \int k_2 \, ds$$

on voit tout de suite que, le nombre r ayant la même valeur dans tous les trois tableaux, si une des quantités $k_1, k_2, \dfrac{k_1}{k_2}$ est de classe r ou de classe $\geqq r + 1$ en tant que fonction d'une des trois variables s, σ_1, σ_2, alors le même se produira si on la considère comme fonction d'une autre de ces variables, ce qui n'est plus vrai si la quantité envisagée est de classe $\geqq r + 2$ en tant que fonction d'une des s, σ_1, σ_2. En tenant compte de cette remarque, on trouve sans peine qu'on a pour le type différentiel de C les possibilités

$$A(r), \; B(r), \; C_1(r), \; C_2(r), \; D_1(r), \; D_2(r) \quad (r = 0, 1, 2, \ldots)$$

suivantes (en dehors du cas exclu de classes différentielles infinies):

Cas $A(r)$. Les fonctions $k_1(s)$, $k_2(s)$, $\frac{k_1(s)}{k_2(s)}$ $\left[\text{ou bien } k_1(\sigma_1), k_2(\sigma_1), \frac{k_1(\sigma_1)}{k_2(\sigma_1)} \text{ on encore } k_1(\sigma_2), k_2(\sigma_2), \frac{k_1(\sigma_2)}{k_2(\sigma_2)}\right]$ sont de classe égale à r. Les classes différentielles de C relatives a $t = s$, $t = \sigma_1$, $t = \sigma_2$ sont données par le tableau (4.4).

$$\begin{array}{c||c|c|c} & X & T_1 & T_2 \\ t = s & r+2 & r+1 & r+1 \\ t = \sigma_1 & r+1 & r+2 & r+1 \\ t = \sigma_2 & r+1 & r+1 & r+2 \end{array} \tag{4.4}$$

Cas $B(r)$. Les fonctions $k_1(s)$, $\frac{k_1(s)}{k_2(s)}$ $\left[\text{ou bien } k_1(\sigma_1), \frac{k_1(\sigma_1)}{k_2(\sigma_1)} \text{ ou encore } k_1(\sigma_2), \frac{k_1(\sigma_2)}{k_2(\sigma_2)}\right]$ sont de classe r, la fonction $k_2(s)$ [ou $k_2(\sigma_1)$ ou $k_2(\sigma_2)$] est de classe $\geqq r + 1$. Les clasess différentielles de C relatives a $t = s$, $t = \sigma_1$, $t = \sigma_2$ sont données par le tableau (4.5).

$$\begin{array}{c||c|c|c} & X & T_1 & T_2 \\ t = s & r+2 & r+1 & r+2 \\ t = \sigma_1 & r+1 & r+2 & r+1 \\ t = \sigma_2 & r+2 & r+1 & r+2 \end{array} \tag{4.5}$$

Cas $C_1(r)$. Les fonctions $k_1(s), k_2(s)$ [ou bien $k_1(\sigma_1)$ $k_2(\sigma_1)$ ou encore $k_1(\sigma_2)$, $k_2(\sigma_2)$] sont de classe r, la fonction $\frac{k_1(\sigma_1)}{k_2(\sigma_1)}$ est de classe $r + 1$. $\left[\text{Il est permis de remplacer } \frac{k_1(\sigma_1)}{k_2(\sigma_1)} \text{ par } \frac{k_1(\sigma_2)}{k_2(\sigma_2)}, \text{ mais non par } \frac{k_1(s)}{k_2(s)}.\right]$ Les classes différentielles de C relatives à $t = s$, $t = \sigma_1$, $t = \sigma_2$ sont données par le tableau (4.6).

$$\begin{array}{c||c|c|c} & X & T_1 & T_2 \\ t = s & r+2 & r+1 & r+1 \\ t = \sigma_1 & r+1 & r+2 & r+2 \\ t = \sigma_2 & r+1 & r+2 & r+3 \end{array} \tag{4.6}$$

Cas $C_2(r)$. Les fonctions $k_2(s)$, $\frac{k_1(s)}{k_2(s)}$ $\left[\text{ou bien } k_2(\sigma_1), \frac{k_1(\sigma_1)}{k_2(\sigma_1)} \text{ ou encore } k_2(\sigma_2), \frac{k_1(\sigma_2)}{k_2(\sigma_2)}\right]$ sont de classe r, la fonction $k_1(\sigma_1)$ est de classe $r + 1$. [Il est permis de remplacer $k_1(\sigma_1)$ par $k_1(s)$, mais non par $k_1(\sigma_2)$.] Les classes différentielles de C relatives à $t = s$, $t = \sigma_1$, $t = \sigma_2$ sont données par le tableau (4.7).

$$
\begin{array}{c||c|c|c}
 & X & T_1 & T_2 \\
t = s & r+3 & r+2 & r+1 \\
t = \sigma_1 & r+2 & r+2 & r+1 \\
t = \sigma_2 & r+1 & r+1 & r+2
\end{array}
\tag{4.7}
$$

Cas $D_1(r)$. Les fonctions $k_1(s)$, $k_2(s)$ [ou bien $k_1(\sigma_1)$, $k_2(\sigma_1)$ ou encore $k_1(\sigma_2)$, $k_2(\sigma_2)$] sont de classe r, la fonction $\dfrac{k_1(\sigma_1)}{k_2(\sigma_1)}$ est de classe $\geqq r + 2$. $\left[\text{Il est permis de remplacer } \dfrac{k_1(\sigma_1)}{k_2(\sigma_1)} \text{ par } \dfrac{k_1(\sigma_2)}{k_2(\sigma_2)}, \text{ mais non par } \dfrac{k_1(s)}{k_2(s)}.\right]$ Les classes différentielles de C relatives à $t = s$, $t = \sigma_1$, $t = \sigma_2$ sont données par le tableau (4.8).

$$
\begin{array}{c||c|c|c}
 & X & T_1 & T_2 \\
t = s & r+2 & r+1 & r+1 \\
t = \sigma_1 & r+1 & r+2 & r+3 \\
t = \sigma_2 & r+1 & r+2 & r+3
\end{array}
\tag{4.8}
$$

Cas $D_2(r)$. Les fonctions $k_2(s)$, $\dfrac{k_1(s)}{k_2(s)}$ $\left[\text{ou bien } k_2(\sigma_1), \dfrac{k_1(\sigma_1)}{k_2(\sigma_1)} \text{ ou encore } k_2(\sigma_2), \dfrac{k_1(\sigma_2)}{k_2(\sigma_2)}\right]$ sont de classe r, la fonction $k_1(\sigma_1)$ est de classe $\geqq r + 2$. [Il est permis de remplacer $k_1(\sigma_1)$ par $k_1(s)$, mais non par $k_1(\sigma_2)$.] Les classes différentielles de C relatives à $t = s$, $t = \sigma_1$, $t = \sigma_2$ sont données par le tableau (4.9).

$$
\begin{array}{c||c|c|c}
 & X & T_1 & T_2 \\
t = s & r+3 & r+2 & r+1 \\
t = \sigma_1 & r+3 & r+2 & r+1 \\
t = \sigma_2 & r+1 & r+1 & r+2
\end{array}
\tag{4.9}
$$

5. Cas n = 4. Détermination de la classe différentielle. Partons des équations

$$
\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}t} = K_1 e_2\,, \quad \frac{\mathrm{d}e_2}{\mathrm{d}t} = - K_1 e_1 + K_2 e_3\,, \quad \frac{\mathrm{d}e_3}{\mathrm{d}t} = - K_2 e_2 + K_3 e_4\,, \quad \frac{\mathrm{d}e_4}{\mathrm{d}t} = - K_3 e_3\,;
\tag{5.1}
$$

posons $\mathrm{cl}\, K_i(t) = r_i$ $(i = 1, 2, 3)$, $r = \min(r_1, r_2, r_3)$. Il est manifeste que les classes des vecteurs e_1, e_2, e_3, e_4 sont $\geqq r + 1$. Comme $|e_2| = |e_3| = 1$, on a

$$
\mathrm{cl}\left(\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}t}\right) = \min(r_1, \mathrm{cl}\, e_2)\,, \quad \mathrm{cl}\left(\frac{\mathrm{d}e_4}{\mathrm{d}t}\right) = \min(r_3, \mathrm{cl}\, e_3)\,.
\tag{5.2}
$$

Par suite $\mathrm{cl}\, e_1 = r + 1$ pour $r_1 = r$, $\mathrm{cl}\, e_1 \geqq r + 2$ pour $r_1 > r$, $\mathrm{cl}\, e_4 = r + 1$ pour $r_3 = r$, $\mathrm{cl}\, e_4 \geqq r + 2$ pour $r_3 > r$. Comme $K_1 = - e_1 \dfrac{\mathrm{d}e_2}{\mathrm{d}t}$, $K_3 = e_4 \dfrac{\mathrm{d}e_3}{\mathrm{d}t}$, on a cl $e_2 = r + 1$ pour $r_1 = r$, cl $e_3 = r + 1$ pour $r_3 = r$. Pour $r_1 = r_3 = r \leqq r_2$ on aura donc cl $e_i = r + 1$ $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Soit $r_1 = r_2 = r < r_3$. Nous savons déjà que cl $e_1 =$ cl $e_2 = r + 1$; comme $K_2 = - e_2 \dfrac{de_3}{dt}$ est de classe r, on a cl $e_3 = r + 1$, donc cl $\left(\dfrac{de_4}{dt}\right) = \min(r_3, r + 1) = r + 1$, d'où cl $e_4 = r + 2$.

Pareillement pour $r_1 > r = r_2 = r_3$ on obtient cl $e_1 = r + 2$, cl $e_i = r + 1$ pour $i = 2, 3, 4$.

Soit $r_1 = r$, $r_2 > r$, $r_3 > r$. Nous savons que cl $e_1 =$ cl $e_2 = r + 1$, cl $e_4 \geqq r + 2$; comme cl$(- K_2e_2 + K_3e_4) \geqq r + 1$, on a cl $e_3 \geqq r + 2$. Soit d'abord $r_3 = r + 1$. Alors (5.2_2) donne cl $e_4 = r + 2$; comme $e_4 \dfrac{de_3}{dt} = K_3$ est de classe $r + 1$, on a cl $e_3 = r + 2$. Si l'on a $r_3 \geqq r + 2$, on aura cl$(K_3e_4) \geqq r + 2$, cl $K_2e_2 = r + 1$, donc cl $\left(\dfrac{de_3}{dt}\right) = r + 1$, cl $e_3 = r + 2$, d'où cl$(K_3e_3) = r + 2$, cl $e_4 = r + 3$. On obtient donc que pour $r = r_1$, $r_3 = r + 1 \leqq r_2$ on a cl $e_1 =$ cl $e_2 = r + 1$, cl $e_3 =$ cl $e_4 = r + 2$; pour $r_1 = r$, $r_2 \geqq r + 1$, $r_3 \geqq r + 2$ on a cl $e_1 =$ cl $e_2 = r + 1$, cl $e_3 = r + 2$, cl $e_4 = r + 3$.

Pareillement on obtient que pour $r_3 = r$, $r_1 = r + 1 \leqq r_2$ on a cl $e_1 =$ cl $e_2 = r + 2$, cl $e_3 =$ cl $e_4 = r + 1$; pour $r_3 = r$, $r_2 \geqq r + 1$, $r_1 \geqq r + 2$ on a cl $e_1 = r + 3$, cl $e_2 = r + 2$, cl $e_3 =$ cl $e_4 = r + 1$.

Soit enfin $r_2 = r$, $r_1 \geqq r + 1$, $r_3 \geqq r + 1$. Alors cl$(K_2e_2) =$ cl$(K_2e_3) = r$, mais cl$(K_1e_1) \geqq r + 1$, cl$(K_3e_4) \geqq r + 1$, donc cl $\left(\dfrac{de_2}{dt}\right) =$ cl $\left(\dfrac{de_3}{dt}\right) = r$, cl $e_2 =$ cl $e_3 = r + 1$, d'où cl $e_1 =$ cl $e_4 = r + 2$.

Nous avons ainsi vérifié le tableau suivant, excepté la dernière colonne indiquant la classe du bivecteur $[e_1e_3]$

K_1	K_2	K_3	e_1	e_2	e_3	e_4	$[e_1e_2]$
r	r	r	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$
r	$\geqq r+1$	r	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$
r	r	$\geqq r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$
$\geqq r+1$	r	r	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$
r	$\geqq r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+2$	$r+2$
$r+1$	$\geqq r+1$	r	$r+2$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$
r	$\geqq r+1$	$\geqq r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+3$	$r+2$
$\geqq r+2$	$\geqq r+1$	r	$r+3$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$
$\geqq r+1$	r	$\geqq r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$

(5.3)

Nous allons vérifier la dernière colonne de (5.3). Il est manifeste que $\mathrm{cl}[e_1e_2] \geqq r + 1$, $\mathrm{cl}[e_1e_3] \geqq r + 1$. D'autre part $\frac{\mathrm{d}[e_1e_2]}{\mathrm{d}t} = K_2[e_1e_3]$ et $|[e_1e_3]| = 1$, d'où $\mathrm{cl}\,\frac{\mathrm{d}[e_1e_2]}{\mathrm{d}t} = \min(r_2, \mathrm{cl}[e_1e_3])$ donc $\mathrm{cl}[e_1e_2] = r + 1$ pour $r_2 = r$, $\mathrm{cl}[e_1e_2] \geqq$ $\geqq r + 2$ pour $r_2 \geqq r + 1$. Copendant on voit sans peine que $\mathrm{cl}[e_1e_2] \leqq \mathrm{cl}\, e_1 + 1$, $\mathrm{cl}[e_1e_2] \leqq \mathrm{cl}[e_1e_2e_3] + 1 = \mathrm{cl}\, e_4 + 1$. On a donc $\mathrm{cl}[e_1e_2] \leqq r + 2$ dans tous les cas du tableau (5.3) [dans le cas de la dernière ligne de (5.3) on a $\mathrm{cl}[e_1e_2] = r + 1$, parce que $r_2 = r$].

Pour déterminer la classe différentielle de C, il faut ajouter à (5.1) l'équation

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = K_0e_1\,. \tag{5.4}$$

Comme $|e_1| = 1$, on a

$$\mathrm{cl}\left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\right) = \min(r_0, \mathrm{cl}\, e_1) \tag{5.5}$$

où $r_0 = \mathrm{cl}\, K_0$. Posons encore

$$X = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 \tag{5.6}$$

de sorte que

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = K_0 + K_1x_2\,, \quad \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = -K_1x_1 + K_2x_3\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t} = -K_2x_2 + K_3x_4\,, \quad \frac{\mathrm{d}x_4}{\mathrm{d}t} = -K_3x_3 \tag{5.7}$$

ainsi que

$$[Xe_2] = x_1[e_1e_2] - x_3[e_2e_3] - x_4[e_2e_4]\,, \tag{5.8}$$

$$[Xe_1e_3] = -x_2e_4 + x_4e_3\,, \tag{5.9}$$

$$Xe_4 = x_4\,. \tag{5.10}$$

Remarquons aussi que

$$\frac{\mathrm{d}[Xe_1]}{\mathrm{d}t} = K_1[Xe_2]\,, \quad \frac{\mathrm{d}[Xe_1e_2]}{\mathrm{d}t} = K_2[Xe_1e_3]\,. \tag{5.11}$$

Nous allons considérer successivement les neuf cas du tableau (5.3). Soit d'abord $r_1 = r_2 = r_3 = r$, de sorte que $\mathrm{cl}\, e_1 = \mathrm{cl}\, e_2 = \mathrm{cl}\, e_3 = \mathrm{cl} e_4 = \mathrm{cl}[e_1e_2] =$ $= r + 1$. Selon (5.5) on a $\mathrm{cl}\, X = r + 2$ pour $r_0 \geqq r + 1$, $\mathrm{cl}\, X = r_0 + 1$ pour $r_0 \leqq r$. Dans le cas $r_0 \geqq r$, les classes de e_1, $[e_1e_2]$, e_3 sont au plus égales à $\mathrm{cl}\, X$;

on a donc dans ce cas $\mathrm{cl}\, T_1 = \mathrm{cl}\, T_2 = \mathrm{cl}\, T_3 = r + 1$. Pour $r_0 < r$ on déduit de (5.7) que $\mathrm{cl}\, x_1 = r_0 + 1$, $\mathrm{cl}\, x_i \geqq r_0 + 2$ pour $i = 2, 3, 4$. De (5.8) on déduit donc que $\mathrm{cl}[Xe_2] = r_0 + 1$, d'où selon ($5.11_1$) $\mathrm{cl}[Xe_1] \geqq r_0 + 2$ pour $r = r_0 + 1$, $\mathrm{cl}[Xe_1] = r_0 + 2$ pour $r \geqq r_0 + 2$. Comme $\mathrm{cl}\, e_1 = r + 1$, on a donc [v. (1.4)] $\mathrm{cl}\, T_1 = r_0 + 2$ pour $r_0 < r$. De (5.9) on déduit que pour $r_0 < r$ on a $\mathrm{cl}[Xe_1e_3] \geqq r_0 + 2$, d'où selon ($5.11_2$) $\mathrm{cl}[Xe_1e_2] = r_0 + 2$ pour $r = r_0 + 1$, $\mathrm{cl}[Xe_1e_2] \geqq r_0 + 3$ pour $r \geqq r_0 + 2$. Comme $\mathrm{cl}[e_1e_2] = r + 1$, (1.4) donne que pour $r = r_0 + 1$ on a $\mathrm{cl}\, T_2 = r_0 + 2$, et pour $r \geqq r_0 + 2$, $\mathrm{cl}\, T_2 \geqq r_0 + 3$ et donc $\mathrm{cl}\, T_2 = r_0 + 3$, car $\mathrm{cl}\, T_2 \leqq \mathrm{cl}\, T_1 + 1$. Pour $r = r_0 + 1$ on a $\mathrm{cl}\, e_4 = r_0 + 2$, $\mathrm{cl}\, Xe_4 \geqq r_0 + 2$ [v. (5.10)] d'où [v. (1.4)] $\mathrm{cl}\, T_3 = r + 2$. Pour $r \geqq r_0 + 2$ on déduit de (5.7) que $\mathrm{cl}\, x_1 = r_0 + 1$, $\mathrm{cl}\, x_2 = r_0 + 2$, $\mathrm{cl}\, x_3 \geqq r_0 + 3$ et $\mathrm{cl}\, x_4 = r_0 + 3$ pour $r = r_0 + 2$, $\mathrm{cl}\, x_4 \geqq r_0 + 4$ pour $r \geqq r_0 + 3$. Comme $\mathrm{cl}\, e_4 = r + 1$, (1.4) donne que $\mathrm{cl}\, T_3 = r_0 + 3$ pour $r = r_0 + 2$, et pour $r \geqq r_0 + 3$ on obtient $\mathrm{cl}\, T_3 \geqq r_0 + 4$, d'où $\mathrm{cl}\, T_3 = r_0 + 4$, car $\mathrm{cl}\, T_3 \leqq \mathrm{cl}\, T_2 + 1$.

Soit $r_1 = r_3 = r$, $r_2 \geqq r + 1$ de sorte que (5.3) donne $\mathrm{cl}\, e_i = r + 1$ ($i = 1, 2, 3, 4$), $\mathrm{cl}[e_1e_2] = r + 2$. De (5.5) on obtient que $\mathrm{cl}\, X = r + 2$ pour $r_0 \geqq r + 1$, $\mathrm{cl}\, X = r_0 + 1$ pour $r_0 \leqq r$. Pour $r_0 \geqq r + 1$ les classes de e_1, $[e_1e_2]$, e_4 sont au plus égales à celle de X, de sorte que $\mathrm{cl}\, T_1 = \mathrm{cl}\, T_3 = r + 1$, $\mathrm{cl}\, T_2 = r + 2$ d'après (1.4). Si $r_0 = r$, on a $\mathrm{cl}\, e_1 = \mathrm{cl}\, e_4 = \mathrm{cl}\, X$ et (1.4) donne $\mathrm{cl}\, T_1 = \mathrm{cl}\, T_3 = r + 1$; or pour $r_0 = r$ (5.7) donne $\mathrm{cl}\, x_i \geqq r + 1$ ($i = 1, 2, 3, 4$), ensuite (5.9) donne $\mathrm{cl}[Xe_1e_3] \geqq r + 1$ et (5.11_2) donne $\mathrm{cl}[Xe_1e_2] \geqq r + 2$, de sorte que $\mathrm{cl}\, T_2 \geqq r + 2$ d'après (1.4) et par suite $\mathrm{cl}\, T_2 = r + 2$, car $\mathrm{cl}\, T_2 \leqq \mathrm{cl}\, T_1 + 1$. Soit $r_0 < r$; (5.7) donne $\mathrm{cl}\, x_1 = r_0 + 1$, $\mathrm{cl}\, x_i \geqq r_0 + 2$ ($i = 2,3,4$). De (5.8) on déduit alors que $\mathrm{cl}[Xe_2] = r_0 + 1$ et ensuite (5.11_1) donne que $\mathrm{cl}[Xe_1] \geqq r_0 + 2$ pour $r = r_0 + 1$, $\mathrm{cl}[Xe_1] = r_0 + 2$ pour $r \geqq r_0 + 2$; de (1.4) on déduit alors que $\mathrm{cl}\, T_1 = r_0 + 2$ pour $r_0 < r$. Toujours pour $r_0 < r$, (5.9) donne $\mathrm{cl}[Xe_1e_3] \geqq r_0 + 2$ et (5.11_2) donne $\mathrm{cl}[Xe_1e_2] \geqq r_0 + 3$, d'où $\mathrm{cl}\, T_2 \geqq r_0 + 3$ et en fait $\mathrm{cl}\, T_2 = r_0 + 3$, car $\mathrm{cl}\, T_2 \leqq \mathrm{cl}\, T_1 + 1$. Pour $r = r_0 + 1$ on a $\mathrm{cl}\, e_4 = r_0 + 2$, $\mathrm{cl}\, x_4 \geqq r_0 + 2$, d'où $\mathrm{cl}\, T_3 = r_0 + 2$. Pour $r = r_0 + 2$ on déduit de (5.7_4) que $\mathrm{cl}\, x_4 \geqq r_0 + 3$, d'où $\mathrm{cl}\, T_3 = r_0 + 3$, car $\mathrm{cl}\, e_4 = r_0 + 3$. Dans le cas $r \geqq r_0 + 3$ (5.7) donne successivement $\mathrm{cl}\, x_1 = r_0 + 1$, $\mathrm{cl}\, x_2 = r_0 + 2$, $\mathrm{cl}\, x_3 = r_0 + 3$, $\mathrm{cl}\, x_4 \geqq r_0 + 4$ d'où $\mathrm{cl}\, T_3 = r_0 + 4$, car $\mathrm{cl}\, e_4 \geqq r_0 + 4$, $\mathrm{cl}\, T_3 \leqq \mathrm{cl}\, T_2 + 1$.

Soit $r_1 = r_2 = r$, $r_3 \geqq r + 1$ de sorte que (5.3) donne $\mathrm{cl}\, e_i = r + 1$ ($i = 1, 2, 3$), $\mathrm{cl}\, e_4 = r + 2$, $\mathrm{cl}[e_1e_2] = r + 1$. De (5.5) on obtient que $\mathrm{cl}\, X = r + 2$ pour $r_0 \geqq r + 1$, $\mathrm{cl}\, X = r_0 + 1$ pour $r_0 \leqq r$. Pour $r_0 \geqq r + 1$ les classes de e_1, $[e_1e_2]$, e_4 sont au plus égales à celle de X, de sorte que $\mathrm{cl}\, T_1 = \mathrm{cl}\, T_2 = r + 1$, $\mathrm{cl}\, T_3 = r + 2$ d'après (1.4). Si $r = r_0$, on a $\mathrm{cl}\, e_1 = \mathrm{cl}[e_1e_2] = \mathrm{cl}\, X$ et (1.4) donne $\mathrm{cl}\, T_1 = \mathrm{cl}\, T_2 = r + 1$; or pour $r = r_0$ (5.7) donne $\mathrm{cl}\, x_3 \geqq r + 2$, $\mathrm{cl}\, x_4 \geqq r + 2$ de sorte que (5.10) donne $\mathrm{cl}\, T_3 = r + 2$. Pour $r_0 < r$ on déduit de (5.7) que $\mathrm{cl}\, x_1 = r_0 + 1$, $\mathrm{cl}\, x_i \geqq r_0 + 2$ ($i = 2, 3, 4$), d'où

$\text{cl}[Xe_2] = r_0 + 1$ d'après (5.8), $\text{cl}[Xe_1e_3] \geqq r_0 + 2$ d'après (5.9). Ensuite (5.11_1) donne $\text{cl}[Xe_1] \geqq r_0 + 2$ pour $r = r_0 + 1$, $\text{cl}[Xe_1] = r_0 + 2$ pour $r \geqq r_0 + 2$ et comme $\text{cl}\, e_1 = r + 1$, on obtient [v. (1.4)] que $\text{cl}\, T_1 = r_0 + 2$ pour $r_0 < r$. (5.11_2) donne $\text{cl}[Xe_1e_2] = r_0 + 2$ pour $r = r_0 + 1$, $\text{cl}[Xe_1e_2] \geqq r_0 + 3$ pour $r \geqq r_0 + 2$ et comme $\text{cl}[e_1e_2] = r + 1$, $\text{cl}\, T_2 \leqq \text{cl}\, T_1 + 1$, on obtient que $\text{cl}\, T_2 = r_0 + 2$ pour $r = r_0 + 1$, $\text{cl}\, T_2 = r_0 + 3$ pour $r \geqq r_0 + 2$. Pour $r = r_0 + 1$ on déduit de (5.7) que $\text{cl}(K_3x_3) \geqq r_0 + 2$, $\text{cl}\, x_4 \geqq r_0 + 3$; pour $r \geqq r_0 + 2$ on déduit de (5.7) que $\text{cl}(K_3x_3) \geqq r_0 + 3$, $\text{cl}\, x_4 \geqq r_0 + 4$. Comme $\text{cl}\, e_4 = r + 2$, $\text{cl}\, T_3 \leqq \text{cl}\, T_2 + 1$, on obtient [v. (1.4) et (5.10)] que $\text{cl}\, T_3 = r_0 + 3$ pour $r = r_0 + 1$, $\text{cl}\, T_3 = r_0 + 4$ pour $r \geqq r_0 + 2$.

Soit $r_1 \geqq r + 1$, $r_2 = r_3 = r$ de sorte que (5.3) donne $\text{cl}\, e_1 = r + 2$, $\text{cl}\, e_i = r + 1$ $(i = 2, 3, 4)$, $\text{cl}[e_1e_2] = r + 1$. De (5.5) on obtient que $\text{cl}\, X = r + 3$ pour $r_0 \geqq r + 2$, $\text{cl}\, X = r_0 + 1$ pour $r_0 \leqq r + 1$. Pour $r_0 \geqq r + 1$ les classes de e_1, $[e_1e_2]$, e_4 sont au plus égales à celle de X de sorte que $\text{cl}\, T_1 = r + 2$, $\text{cl}\, T_2 = \text{cl}\, T_3 = r + 1$ d'après (1.4). Si $r_0 = r$, on a $\text{cl}[e_1e_2] = \text{cl}\, e_4 = \text{cl}\, X$ et (1.4) donne $\text{cl}\, T_2 = \text{cl}\, T_3 = r + 1$; en outre, pour $r_0 = r$ on a $\text{cl}[Xe_2] \geqq r + 1$ et (5.11_1) donne $\text{cl}[Xe_1] \geqq r + 2$; comme $\text{cl}\, e_1 = r + 2$, on obtient $\text{cl}\, T_1 = r + 2$ pour $r_0 = r$. Pour $r_0 < r$ on a d'après (5.7) $\text{cl}\, x_1 = r_0 + 1$, $\text{cl}\, x_i \geqq r_0 + 2$ $(i = 2, 3, 4)$ de sorte que $\text{cl}[Xe_2] = r_0 + 1$ selon (5.8) et $\text{cl}[Xe_1e_3] \geqq r_0 + 2$ selon (5.9). De (5.11_1) on déduit que $\text{cl}[Xe_1] = r_0 + 2$, d'où $\text{cl}\, T_1 = r_0 + 2$ d'après (1.4). Ensuite on déduit de (5.11_2) que $\text{cl}[Xe_1e_2] = r_0 + 2$ pour $r = r_0 + 1$, $\text{cl}[Xe_1e_2] \geqq r_0 + 3$ pour $r \geqq r_0 + 2$. Comme $\text{cl}[e_1e_2] = r + 1$, $\text{cl}\, T_2 \leqq \text{cl}\, T_1 + 1$, on a donc $\text{cl}\, T_2 = r_0 + 2$ pour $r = r_0 + 1$, $\text{cl}\, T_2 = r_0 + 3$ pour $r \geqq r_0 + 2$. De (5.7) on déduit que $\text{cl}\, x_4 = r_0 + 2$ pour $r = r_0 + 1$, $\text{cl}\, x_4 \geqq r_0 + 3$ pour $r = r_0 + 2$, $\text{cl}\, x_4 \geqq r + 4$ pour $r \geqq r_0 + 3$. Comme $\text{cl}\, e_4 = r + 1$, $\text{cl}\, T_3 \leqq \text{cl}\, T_2 + 1$, on obtient [v. (1.4) et (5.10)] que $\text{cl}\, T_3 = r_0 + 2$ pour $r = r_0 + 1$, $\text{cl}\, T_3 = r_0 + 3$ pour $r = r_0 + 2$, $\text{cl}\, T_3 = r_0 + 4$ pour $r \geqq r_0 + 3$.

Soit $r_1 = r$, $r_3 = r + 1$, $r_2 \geqq r + 1$ de sorte que (5.3) donne $\text{cl}\, e_1 = \text{cl}\, e_2 = r + 1$, $\text{cl}\, e_3 = \text{cl}\, e_4 = \text{cl}[e_1e_2] = r + 2$. De (5.5) on obtient que $\text{cl}\, X = r + 2$ pour $r_0 \geqq r + 1$, $\text{cl}\, X = r_0 + 1$ pour $r_0 \leqq r$. Pour $r_0 \geqq r + 1$ les classes de e_1, $[e_1e_2]$, e_4 sont au plus égales à celle de X de sorte que $\text{cl}\, T_1 = r + 1$, $\text{cl}\, T_2 = \text{cl}\, T_3 = r + 2$ d'après (1.4). Pour $r_0 = r$ on a $\text{cl}[Xe_2] \geqq r + 1$ $\text{cl}[Xe_1e_3] \geqq r + 1$. Ensuite (5.11_1) donne $\text{cl}[Xe_1] = r + 1 = \text{cl}\, e_1$ d'où $\text{cl}\, T_1 = r + 1$ pour $r_0 = r$; (5.11_2) donne $\text{cl}[Xe_1e_2] \geqq r + 2 = \text{cl}[e_1e_2]$, d'où $\text{cl}\, T_2 = r + 2$ pour $r_0 = r$; en outre, (5.7) donne pour $r_0 = r$ que $\text{cl}\, x_4 \geqq r + 2 = \text{cl}\, e_4$, d'où $\text{cl}\, T_3 = r + 2$ pour $r_0 = r$. Pour $r_0 < r$ (5.7) donne $\text{cl}\, x_1 = r_0 + 1$, $\text{cl}\, x_2 \geqq r_0 + 2$, $\text{cl}\, x_3 \geqq r_0 + 3$, $\text{cl}\, x_4 \geqq r_0 + 3$ de sorte que (5.8) donne $\text{cl}[Xe_2] = r_0 + 1$ et (5.9) donne $\text{cl}[Xe_1e_3] \geqq r_0 + 2$. (5.11_1) montre alors que $\text{cl}[Xe_1] \geqq r_0 + 2$ pour $r = r_0 + 1$, $\text{cl}[Xe_1] = r_0 + 2$ pour $r \geqq r_0 + 2$; comme $\text{cl}\, e_1 = r + 1$, on a $\text{cl}\, T_1 = r_0 + 2$ pour $r_0 < r$ d'après (1.4). Ensuite

(5.11_2) montre que $\mathrm{cl}[Xe_1e_2] \geqq r_0 + 3$ et comme $\mathrm{cl}[e_1e_2] = r + 2$, $\mathrm{cl}\, T_2 \leqq \mathrm{cl}\, T_1 + 1$, on obtient $\mathrm{cl}\, T_2 = r_0 + 3$ pour $r_0 < r$. Comme $\mathrm{cl}\, x_3 \geqq r_0 + 3$, on déduit de (5.7_4) que $\mathrm{cl}\, x_4 \geqq r_0 + 3$ pour $r = r_0 + 1$, $\mathrm{cl}\, x_4 \geqq r_0 + 4$ pour $r \geqq r_0 + 2$. Comme $\mathrm{cl}\, e_4 = r + 2$, $\mathrm{cl}\, T_3 \leqq \mathrm{cl}\, T_2 + 1$, on a donc [v. (1.4) et (5.10)] $\mathrm{cl}\, T_3 = r_0 + 3$ pour $r = r_0 + 1$; $\mathrm{cl}\, T_3 = r_0 + 4$ pour $r \geqq r_0 + 2$.

Soit $r_1 = r + 1$, $r_3 = r$, $r_2 \geqq r + 1$ de sorte que (5.3) donne $\mathrm{cl}\, e_1 = \mathrm{cl}\, e_2 = \mathrm{cl}[e_1e_2] = r + 2$, $\mathrm{cl}\, e_3 = \mathrm{cl}\, e_4 = r + 1$. De (5.5) on obtient que $\mathrm{cl}\, X = r + 3$ pour $r_0 \geqq r + 2$, $\mathrm{cl}\, X = r_0 + 1$ pour $r_0 \leqq r + 1$. Pour $r_0 \geqq r + 1$ les classes de e_1, $[e_1e_2]$, e_4 sont au plus égales à celle de X de sorte que $\mathrm{cl}\, T_1 = \mathrm{cl}\, T_2 = r + 2$, $\mathrm{cl}\, T_3 = r + 1$. Pour $r_0 = r$ les classes de $[Xe_2]$, $[Xe_1e_3]$ et Xe_4 sont $\geqq r + 1$, d'où $\mathrm{cl}[Xe_1] \geqq r + 2$, $\mathrm{cl}[Xe_1e_2] \geqq r + 2$ selon (5.11); comme $\mathrm{cl}\, e_1 = \mathrm{cl}\, [e_1e_2] = r + 2$, $\mathrm{cl}\, e_4 = r + 1$, on obtient de (1.4) que $\mathrm{cl}\, T_1 = \mathrm{cl}\, T_2 = r + 2$, $\mathrm{cl}\, T_3 = r + 1$. Pour $r_0 < r$ on a $\mathrm{cl}[Xe_2] \geqq r_0 + 1$, d'où $\mathrm{cl}[Xe_1] \geqq r_0 + 2$ selon (5.11_1) et comme $\mathrm{cl}\, T_1 \leqq \mathrm{cl}\, X + 1$, on a $\mathrm{cl}\, T_1 = r_0 + 2$; de plus on déduit de (5.7) et (5.9) que $\mathrm{cl}[Xe_1e_3] \geqq r_0 + 2$, d'où $\mathrm{cl}[Xe_1e_2] \geqq r_0 + 3$ selon (5.11_2) et comme $\mathrm{cl}\, T_2 \leqq \mathrm{cl}\, T_1 + 1$, on a $\mathrm{cl}\, T_2 = r_0 + 3$. Toujours pour $r_0 < r$, (5.7) donne d'abord $\mathrm{cl}\, x_3 \geqq r_0 + 2$ et ensuite $\mathrm{cl}\, x_4 = r_0 + 2$ pour $r = r_0 + 1$, $\mathrm{cl}\, x_4 \geqq r_0 + 3$ pour $r = r_0 + 2$. (1.4) et (5.10) donnent alors $\mathrm{cl}\, T_3 = r_0 + 2$ pour $r = r_0 + 1$; $\mathrm{cl}\, T_3 = r_0 + 3$ pour $r = r_0 + 2$. Si $r \geqq r_0 + 3$, on déduit de (5.7) successivement $\mathrm{cl}\, x_1 = r_0 + 1$, $\mathrm{cl}\, x_2 = r_0 + 2$, $\mathrm{cl}\, x_3 \geqq r_0 + 3$, $\mathrm{cl}\, x_4 \geqq r_0 + 4$ et comme $\mathrm{cl}\, e_4 = r + 1$, $\mathrm{cl}\, T_3 \leqq \mathrm{cl}\, T_2 + 1$, on obtient que $\mathrm{cl}\, T_3 = r_0 + 4$ pour $r \geqq r_0 + 3$.

Soit $r_1 = r$, $r_2 \geqq r + 1$, $r_3 \geqq r + 2$ de sorte que (5.3) donne $\mathrm{cl}\, e_1 = \mathrm{cl}\, e_2 = r + 1$, $\mathrm{cl}\, e_3 = \mathrm{cl}[e_1e_2] = r + 2$, $\mathrm{cl}\, e_4 = r + 3$. De (5.5) on obtient que $\mathrm{cl}\, X = r + 2$ pour $r_0 \geqq r + 1$, $\mathrm{cl}\, X = r_0 + 1$ pour $r_0 \leqq r$. Pour $r_0 \geqq r + 1$ les classes de e_1 et de $[e_1e_2]$ sont au plus égales à celle de X de sorte que $\mathrm{cl}\, T_1 = r + 1$, $\mathrm{cl}\, T_2 = r + 2$ pour $r_0 \geqq r + 1$. Pour $r_0 \geqq r$ il résulte de (5.7) que $\mathrm{cl}\, x_1 \geqq r + 1$, $\mathrm{cl}\, x_2 \geqq r + 1$, $\mathrm{cl}\, x_3 \geqq r + 2$, $\mathrm{cl}\, x_4 \geqq r + 3$; comme $\mathrm{cl}\, e_4 = r + 3$, il résulte de (1.4) et (5.10) que $\mathrm{cl}\, T_3 = r + 3$ pour $r_0 \geqq r$. Pour $r_0 = r$ on a $\mathrm{cl}[Xe_1] \geqq r + 1$, $\mathrm{cl}[Xe_1e_3] \geqq r + 1$ et (5.11_2) donne $\mathrm{cl}[Xe_1e_2] \geqq r + 2$; comme $\mathrm{cl}\, e_1 = r + 1$, $\mathrm{cl}[e_1e_2] = r + 2$, on a $\mathrm{cl}\, T_1 = r + 1$, $\mathrm{cl}\, T_2 = r + 2$ pour $r_0 = r$ en vertu de (1.4). Pour $r_0 < r$ on déduit d'abord de (5.7) que $\mathrm{cl}\, x_1 = r_0 + 1$, $\mathrm{cl}\, x_2 \geqq r_0 + 2$, $\mathrm{cl}\, x_3 \geqq r_0 + 3$, $\mathrm{cl}\, x_4 \geqq r_0 + 4$, ensuite de (5.8) et (5.9) que $\mathrm{cl}[Xe_2] = r_0 + 1$, $\mathrm{cl}[Xe_1e_3] \geqq r_0 + 2$ et enfin de (5.11) que $\mathrm{cl}[Xe_1] \geqq r_0 + 2$, $\mathrm{cl}[Xe_1e_2] \geqq r_0 + 3$. En tenant compte de ce que $\mathrm{cl}\, T_1 \leqq \mathrm{cl}\, X + 1$, $\mathrm{cl}\, T_2 \leqq \mathrm{cl}\, T_1 + 1$, $\mathrm{cl}\, T_3 \leqq \mathrm{cl}\, T_2 + 1$, on voit [v. (1.4) et (5.10)] que $\mathrm{cl}\, T_1 = r_0 + 2$, $\mathrm{cl}\, T_2 = r_0 + 3$, $\mathrm{cl}\, T_3 = r_0 + 4$ pour $r_0 < r$.

Soit $r_1 \geqq r + 2$, $r_2 \geqq r + 1$, $r_3 = r$ de sorte que (5.3) donne $\mathrm{cl}\, e_1 = r + 3$, $\mathrm{cl}\, e_2 = \mathrm{cl}[e_1e_2] = r + 2$, $\mathrm{cl}\, e_3 = \mathrm{cl}\, e_4 = r + 1$. De (5.5) on obtient que $\mathrm{cl}\, X = r + 4$ pour $r_0 \geqq r + 3$, $\mathrm{cl}\, X = r_0 + 1$ pour $r_0 \leqq r + 2$. Pour $r_0 \geqq r + 2$

les classes de e_1, $[e_1e_2]$, e_4 sont au plus égales à celle de X de sorte que $\mathrm{cl}\, T_1 = r + 3$, $\mathrm{cl}\, T_2 = r + 2$, $\mathrm{cl}\, T_3 = r + 1$. Pour $r_0 = r + 1$ la comparaison des classes de $[e_1e_2]$ et e_4 à celle de X donne $\mathrm{cl}\, T_2 = r + 2$, $\mathrm{cl}\, T_3 = r + 1$; de plus on a $\mathrm{cl}[Xe_2] \geqq r + 2$ d'où $\mathrm{cl}[Xe_1] \geqq r + 3 = \mathrm{cl}\, e_1$ d'après (5.11_1), d'où $\mathrm{cl}\, T_1 = r + 3$. Pour $r_0 = r$ les classes de $[Xe_2]$ et $[Xe_1e_3]$ sont $\geqq r + 1$ d'où $\mathrm{cl}[Xe_1] \geqq r + 2$, $\mathrm{cl}[Xe_1e_2] \geqq r + 2$ et comme $\mathrm{cl}\, e_1 = r + 3$, $\mathrm{cl}[e_1e_2] = r + 2$, $\mathrm{cl}\, T_1 \leqq \mathrm{cl}\, X + 1$, on obtient $\mathrm{cl}\, T_1 = \mathrm{cl}\, T_2 = r + 2$ pour $r_0 = r$; en outre on a dans ce cas $\mathrm{cl} X e_4 \geqq r + 1 = \mathrm{cl}\, e_4$, d'où $\mathrm{cl}\, T_3 = r + 1$. Soit $r_0 < r$. De (5.7) il résulte d'abord $\mathrm{cl}\, x_1 = r_0 + 1$, $\mathrm{cl}\, x_2 = r_0 + 2$, puis $\mathrm{cl}\, x_3 \geqq r_0 + 2$. pour $r = r_0 + 1$ et $\mathrm{cl}\, x_3 \geqq r_0 + 3$ pour $r \geqq r_0 + 2$, ensuite $\mathrm{cl}\, x_4 = r_0 + 2$ pour $r = r_0 + 1$, $\mathrm{cl}\, x_4 = r_0 + 3$ pour $r = r_0 + 2$, $\mathrm{cl}\, x_4 \geqq r_0 + 4$ pour $r \geqq r_0 + 3$. En tenant compte de ce que $\mathrm{cl}\, T_3 \leqq \mathrm{cl}\, X + 3$, on voit [v. (1.4) et (5.10)] que $\mathrm{cl}\, T_3 = r_0 + 2$ pour $r = r_0 + 1$, $\mathrm{cl}\, T_3 = r_0 + 3$ pour $r = r_0 + 2$, $\mathrm{cl}\, T_3 = r_0 + 4$ pour $r \geqq r_0 + 3$. Pour $r_0 < r$ on a selon (5.8) $\mathrm{cl}[Xe_2] = r_0 + 1$ et selon (5.9) $\mathrm{cl}[Xe_1e_3] \geqq r_0 + 2$; on a donc en vertu de (5.11) $\mathrm{cl}[Xe_1] = r_0 + 2$, $\mathrm{cl}[Xe_1e_2] \geqq r_0 + 3$, d'oú l'on déduit d'après (1.4) que $\mathrm{cl}\, T_1 = r_0 + 2$, $\mathrm{cl}\, T_2 = r_0 + 3$ (il faut tenir compte de ce que $\mathrm{cl}\, T_2 \leqq \mathrm{cl}\, T_1 + 1$).

Soit enfin $r_1 \geqq r + 1$, $r_2 = r$, $r_3 \geqq r + 1$ de sorte que (5.3) donne $\mathrm{cl}\, e_1 = \mathrm{cl}\, e_4 = r + 2$, $\mathrm{cl}\, e_2 = \mathrm{cl}\, e_3 = \mathrm{cl}[e_1e_2] = r + 1$. De (5.5) on obtient que $\mathrm{cl}\, X = r + 3$ pour $r_0 \geqq r + 2$, $\mathrm{cl}\, X = r_0 + 1$ pour $r_0 \leqq r + 1$. Pour $r_0 \geqq r + 1$ les classes de e_1, $[e_1e_2]$, e_4 ne dépassent pas celle de X de sorte que $\mathrm{cl}\, T_1 = \mathrm{cl}\, T_3 = r + 2$, $\mathrm{cl}\, T_2 = r + 1$. Pour $r_0 = r$ on a encore $\mathrm{cl}[e_1e_2] \leqq \mathrm{cl}\, X$, d'où $\mathrm{cl}\, T_2 = r + 1$; de plus, on a dans ce cas $\mathrm{cl}[Xe_2] \geqq r + 1$, d'où $\mathrm{cl}[Xe_1] \geqq r + 2 = \mathrm{cl}\, e_1$, donc $\mathrm{cl}\, T_1 = r + 2$; toujours pour $r_0 = r$ il résulte de (5.7) et (5.10) que $\mathrm{cl}\, Xe_4 \geqq r + 2 = \mathrm{cl}\, e_4$ ce qui donne $\mathrm{cl}\, T_3 = r + 2$. Soit $r_0 < r$. De (5.7) il résulte que $\mathrm{cl}\, x_1 = r_0 + 1$, $\mathrm{cl}\, x_2 \geqq r_0 + 2$, $\mathrm{cl}\, x_3 \geqq r_0 + 2$, $\mathrm{cl}\, x_4 \geqq r_0 + 3$; on a donc selon (5.8) $\mathrm{cl}[Xe_2] = r_0 + 1$ et selon (5.9) $\mathrm{cl}[Xe_1e_3] \geqq r_0 + 2$; on a donc en vertu de (5.11) $\mathrm{cl}[Xe_1] = r_0 + 2 < \mathrm{cl}\, e_1$, $\mathrm{cl}[Xe_1e_2] = r_0 + 2 = \mathrm{cl}[e_1e_2]$ pour $r = r_0 + 1$, $\mathrm{cl}[Xe_1e_2] \geqq r_0 + 3$ pour $r \geqq r_0 + 2$. Il résulte donc de (1.4) que $\mathrm{cl}\, T_1 = r_0 + 2$ pour $r_0 < r$ et que $\mathrm{cl}\, T_2 = r_0 + 2$ pour $r = r_0 + 1$; en outre on obtient que $\mathrm{cl}\, T_2 = r_0 + 3$ pour $r \geqq r_0 + 2$ en tenant compte de ce que $\mathrm{cl}\, T_2 \leqq \mathrm{cl}\, T_1 + 1$. Pour $r = r_0 + 1$ on a: $\mathrm{cl}\, x_4 \geqq r_0 + 3 = \mathrm{cl}\, e_4$, d'oú $\mathrm{cl}\, T_3 = r_0 + 3$ pour $r = r_0 + 1$. Pour $r \geqq r_0 + 2$ (5.7) donne successivement $\mathrm{cl}\, x_1 = r_0 + 1$, $\mathrm{cl}\, x_2 = r_0 + 2$, $\mathrm{cl}\, x_3 \geqq r_0 + 3$, $\mathrm{cl}\, x_4 \geqq r_0 + 4$. Comme $\mathrm{cl}\, e_4 \geqq r_0 + 4$, $\mathrm{cl}\, T_3 \leqq \mathrm{cl}\, T_2 + 1$, il résulte de (1.4) et (5.10) que $\mathrm{cl}\, T_3 = r_0 + 4$ pour $r \geqq r_0 + 2$.

Les tableaux (5.12), (5.12′), (5.12″) résument les résultats obtenus en exprimant dans tous les cas la classe différentielle de C moyennant les classes des fonctions $K_0(t)$, $K_1(t)$, $K_2(t)$, $K_3(t)$ (la signification de la lettre r est un peu changée).

K_0	K_1	K_2	K_3	X	T_1	T_2	T_3
r	r	r	r	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$
$\geqq r+1$	r	r	$\geqq r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$
r	$\geqq r+1$	$\geqq r+1$	r	$r+1$	$r+2$	$r+2$	$r+1$

(5.12)

K_0	K_1	K_2	K_3	X	T_1	T_2	T_3
$\geqq r+1$	r	r	r	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$
r	$\geqq r+1$	r	r	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$
$\geqq r+1$	r	$\geqq r+1$	r	$r+2$	$r+1$	$r+2$	$r+1$
$r+1$	$\geqq r+1$	r	r	$r+2$	$r+2$	$r+1$	$r+1$
$\geqq r+2$	$\geqq r+1$	r	r	$r+3$	$r+2$	$r+1$	$r+1$
$r+1$	$\geqq r+1$	r	$\geqq r+1$	$r+2$	$r+2$	$r+1$	$r+2$
$\geqq r+2$	$\geqq r+1$	r	$\geqq r+1$	$r+3$	$r+2$	$r+1$	$r+2$
$r+1$	$r+1$	$\geqq r+1$	r	$r+2$	$r+2$	$r+2$	$r+1$
$\geqq r+2$	$r+1$	$\geqq r+1$	r	$r+3$	$r+2$	$r+2$	$r+1$
$r+1$	$\geqq r+2$	$\geqq r+1$	r	$r+2$	$r+3$	$r+2$	$r+1$
$r+2$	$\geqq r+2$	$\geqq r+1$	r	$r+3$	$r+3$	$r+2$	$r+1$
$\geqq r+3$	$\geqq r+2$	$\geqq r+1$	r	$r+4$	$r+3$	$r+2$	$r+1$

(5.12′)

K_0	K_1	K_2	K_3	X	T_1	T_2	T_3
r	r	r	$\geqq r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$
r	r	$\geqq r+1$	r	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$
r	$\geqq r+1$	r	$\geqq r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+2$
r	r	$\geqq r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+2$
r	r	$\geqq r+1$	$\geqq r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+3$
$\geqq r+1$	r	$\geqq r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+2$	$r+2$
$\geqq r+1$	r	$\geqq r+1$	$\geqq r+2$	$r+2$	$r+1$	$r+2$	$r+3$
r	$\geqq r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+2$	$r+2$
r	$\geqq r+1$	$r+1$	$\geqq r+2$	$r+1$	$r+2$	$r+2$	$r+3$
r	$\geqq r+1$	$\geqq r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+3$	$r+2$
r	$\geqq r+1$	$\geqq r+2$	$r+2$	$r+1$	$r+2$	$r+3$	$r+3$
r	$\geqq r+1$	$\geqq r+2$	$\geqq r+3$	$r+1$	$r+2$	$r+3$	$r+4$

(5.12″)

6. Cas $n = 4$. Détermination du type différentiel. Pour $t = s$ on doit remplacer, dans les tableaux (5.12), (5.12′), (5.12″), les quantités K_0, K_1, K_2, K_3 respectivement par $1, k_1, k_2, k_3$, oú k_i $(i = 1, 2, 3)$ est la i-ème courbure de C. Ceci conduit au tableau (6.1).

$k_1(s)$	$k_2(s)$	$k_3(s)$	$X(s)$	$T_1(s)$	$T_2(s)$	$T_3(s)$	
r	r	r	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	
$\geqq r+1$	r	r	$r+3$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	
r	$\geqq r+1$	r	$r+2$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	
r	r	$\geqq r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	
r	$\geqq r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+2$	$r+2$	(6.1)
$r+1$	$\geqq r+1$	r	$r+3$	$r+2$	$r+2$	$r+1$	
$\geqq r+1$	r	$\geqq r+1$	$r+3$	$r+2$	$r+1$	$r+2$	
r	$\geqq r+1$	$\geqq r+2$	$r+2$	$r+1$	$r+2$	$r+3$	
$\geqq r+2$	$\geqq r+1$	r	$r+4$	$r+3$	$r+2$	$r+1$	

Pour $t = \sigma_1$ on obtient le tableau (6.2).

$k_1(\sigma_1)$	$\dfrac{k_2(\sigma_1)}{k_1(\sigma_1)}$	$\dfrac{k_3(\sigma_1)}{k_1(\sigma_1)}$	$X(\sigma_1)$	$T_1(\sigma_1)$	$T_2(\sigma_1)$	$T_3(\sigma_1)$	
r	r	r	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	
$r+1$	r	r	$r+2$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	
$\geqq r+2$	r	r	$r+3$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	
r	$\geqq r+1$	r	$r+1$	$r+2$	$r+2$	$r+1$	
r	r	$\geqq r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+2$	
r	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+2$	$r+2$	
r	$\geqq r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+3$	$r+2$	
r	$r+1$	$\geqq r+2$	$r+1$	$r+2$	$r+2$	$r+3$	(6.2)
r	$\geqq r+2$	$r+2$	$r+1$	$r+2$	$r+3$	$r+3$	
r	$\geqq r+2$	$\geqq r+3$	$r+1$	$r+2$	$r+3$	$r+4$	
$r+1$	r	$\geqq r+1$	$r+2$	$r+2$	$r+1$	$r+2$	
$\geqq r+2$	r	$\geqq r+1$	$r+3$	$r+2$	$r+1$	$r+2$	
$r+1$	$\geqq r+1$	r	$r+2$	$r+3$	$r+2$	$r+1$	
$r+2$	$\geqq r+1$	r	$r+3$	$r+3$	$r+2$	$r+1$	
$\geqq r+3$	$\geqq r+1$	r	$r+4$	$r+3$	$r+2$	$r+1$	

Pour $t = \sigma_2$ on a le tableau (6.3).

$k_2(\sigma_2)$	$\frac{k_1(\sigma_2)}{k_2(\sigma_2)}$	$\frac{k_2(\sigma_2)}{k_3(\sigma_2)}$	$X(\sigma_2)$	$T_1(\sigma_2)$	$T_2(\sigma_2)$	$T_3(\sigma_2)$	
r	r	r	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	
$\geqq r+1$	r	r	$r+2$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	
r	$\geqq r+1$	r	$r+1$	$r+2$	$r+2$	$r+1$	
r	r	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+2$	
r	r	$\geqq r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+3$	
r	$\geqq r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+3$	$r+2$	
r	$\geqq r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+2$	$r+3$	$r+3$	
r	$\geqq r+1$	$\geqq r+3$	$r+1$	$r+2$	$r+3$	$r+4$	(6.3)
$\geqq r+1$	r	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+2$	$r+2$	
$r+1$	$r+1$	r	$r+2$	$r+2$	$r+2$	$r+1$	
$\geqq r+2$	$r+1$	r	$r+3$	$r+2$	$r+2$	$r+1$	
$r+1$	$\geqq r+2$	r	$r+2$	$r+3$	$r+2$	$r+1$	
$\geqq r+1$	r	$\geqq r+2$	$r+2$	$r+1$	$r+2$	$r+3$	
$r+2$	$\geqq r+2$	r	$r+3$	$r+3$	$r+2$	$r+1$	
$\geqq r+3$	$\geqq r+2$	r	$r+4$	$r+3$	$r+2$	$r+1$	

Pour $t = \sigma_3$ on a le tableau (6.4).

$k_3(\sigma_3)$	$\frac{k_1(\sigma_3)}{k_3(\sigma_3)}$	$\frac{k_2(\sigma_3)}{k_3(\sigma_3)}$	$X(\sigma_3)$	$T_1(\sigma_3)$	$T_2(\sigma_3)$	$T_3(\sigma_3)$	
r	r	r	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	
$\geqq r+1$	r	r	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	
r	$\geqq r+1$	r	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+2$	
r	r	$\geqq r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+3$	
r	$\geqq r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+2$	$r+3$	(6.4)
r	$\geqq r+1$	$\geqq r+2$	$r+1$	$r+2$	$r+3$	$r+4$	
$r+1$	$\geqq r+1$	r	$r+2$	$r+2$	$r+1$	$r+2$	
$\geqq r+2$	$\geqq r+1$	r	$r+3$	$r+2$	$r+1$	$r+2$	
$\geqq r+1$	r	$\geqq r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+2$	$r+3$	

Dans le tableau (6.5) des classes des courbures et de leurs rapports la variable indépendante est n'importe laquelle des quantités s, σ_1, σ_2, σ_3; il suffit de remarquer qu'en prenant un couple quelconque de telles quantités, chacune est toujours une fonction de l'autre de classe $\geqq r+1$.

k_1	k_2	k_3	k_1/k_2	k_1/k_3	k_2/k_3	
r	r	r	r	r	r	$A(r)$
r	r	r	$\geqq r+1$	r	r	$B_1(r)$
r	r	r	r	$\geqq r+1$	r	$B_2(r)$
r	r	r	r	r	$\geqq r+1$	$B_3(r)$
r	r	r	$\geqq r+1$	$\geqq r+1$	$\geqq r+1$	$C(r)$
$\geqq r+1$	r	r	r	r	r	$D_1(r)$
r	$\geqq r+1$	r	r	r	r	$D_2(r)$
r	r	$\geqq r+1$	r	r	r	$D_3(r)$
$\geqq r+1$	r	r	r	r	$\geqq r+1$	$E_1(r)$
r	$\geqq r+1$	r	r	$\geqq r+1$	r	$E_2(r)$
r	r	$\geqq r+1$	$\geqq r+1$	r	r	$E_3(r)$
$\geqq r+1$	$\geqq r+1$	r	$\geqq r+1$	r	r	$F_1(r)$
$\geqq r+1$	r	$\geqq r+1$	r	$\geqq r+1$	r	$F_2(r)$
r	$\geqq r+1$	$\geqq r+1$	r	r	$\geqq r+1$	$F_3(r)$

(6.5)

A l'aide des tableaux (6.1)—(6.5) on arrive facilement à indiquer tous les types différentiels possibles pour la courbe C.

Cas $A(r)$. Les fonctions k_1, k_2, k_3, k_1/k_2, k_1/k_3, k_2/k_3 de s (ou de σ_1 ou bien de σ_2 ou enfin de σ_3) sont de classe r. Les classes différentielles de C relatives à $t = s$, $t = \sigma_1$, $t = \sigma_2$, $t = \sigma_3$ sont données par le tableau (6.6).

	X	T_1	T_2	T_3
$t = s$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$
$t = \sigma_1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$
$t = \sigma_2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$
$t = \sigma_3$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$

(6.6)

Cas $B_1(r)$. Les fonctions k_1, k_2, k_3, k_1/k_2, k_1/k_3, k_2/k_3 de s (ou de σ_1 ou bien de σ_2 ou enfin de σ_3) sont de classe r à l'exception de k_1/k_2, qui est de classe $\geqq r+1$. Les classes différentielles de C relatives à $t = s$, $t = \sigma_1$, $t = \sigma_2$, $t = \sigma_3$ sont données par le tableau (6.7).

	X	T_1	T_2	T_3
$t = s$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$
$t = \sigma_1$	$r+1$	$r+2$	$r+2$	$r+1$
$t = \sigma_2$	$r+1$	$r+2$	$r+2$	$r+1$
$t = \sigma_3$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$

(6.7)

Cas $B_2(r)$. Les fonctions $k_1, k_2, k_3, k_1/k_2, k_1/k_3, k_2/k_3$ de s (ou de σ_1 ou bien de σ_2 ou enfin de σ_3) sont de classe r a l'exception de k_1/k_3, qui est de classe $\geqq r+1$. Les classes différentielles de C relatives à $t = s$, $t = \sigma_1$, $t = \sigma_2$, $t = \sigma_3$ sont données par le tableau (6.8).

	X	T_1	T_2	T_3
$t = s$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$
$t = \sigma_1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+2$
$t = \sigma_2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$
$t = \sigma_3$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+2$

(6.8)

Cas $B_{31}(r)$. Les fonctions $k_1, k_3, k_3, k_1/k_2, k_1/k_3$ de s (ou de σ_1 ou bien de σ_2 ou enfin de σ_3) sont de classe r; la fonction $\dfrac{k_2(\sigma_2)}{k_3(\sigma_2)}\left(\text{et donc aussi } \dfrac{k_2(\sigma_3)}{k_3(\sigma_3)}\right)$ est de classe $r+1$. Les classes différentielles de C relatives à $t = s$, $t = \sigma_1$, $t = \sigma_2$, $t = \sigma_3$ sont données par le tableau (6.9).

	X	T_1	T_2	T_3
$t = s$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$
$t = \sigma_1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$
$t = \sigma_2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+2$
$t = \sigma_3$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+3$

(6.9)

Cas $B_{32}(r)$. Les fonctions $k_1, k_2, k_3, k_1/k_2, k_1/k_3$ de s (ou de σ_1 ou bien de σ_2 ou enfin de σ_3) sont de classe r; la fonction $\dfrac{k_2(\sigma_2)}{k_3(\sigma_2)}\left(\text{et donc aussi } \dfrac{k_2(\sigma_3)}{k_3(\sigma_3)}\right)$ est de classe $\geqq r+2$. Les classes différentielles de C relatives à $t = s$, $t = \sigma_1$, $t = \sigma_2$, $t = \sigma_3$ sont données par le tableau (6.10).

	X	T_1	T_2	T_3
$t = s$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$
$t = \sigma_1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$
$t = \sigma_2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+3$
$t = \sigma_3$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+3$

(6.10)

Cas $C_{11}(r)$. Les fonctions k_1, k_2, k_3 de s (ou de σ_1 ou bien de σ_2 ou enfin de σ_3) sont de classe r; les fonctions k_1/k_2, k_1/k_3, k_2/k_3 de σ_1 (ou de σ_2 ou de σ_3) sont de classe $r + 1$. Les classes différentielles de C relatives à $t = s$, $t = \sigma_1$, $t = \sigma_2$, $t = \sigma_3$ sont données par le tableau (6.11).

	X	T_1	T_2	T_3
$t = s$	$r + 2$	$r + 1$	$r + 1$	$r + 1$
$t = \sigma_1$	$r + 1$	$r + 2$	$r + 2$	$r + 2$
$t = \sigma_2$	$r + 1$	$r + 2$	$r + 3$	$r + 2$
$t = \sigma_3$	$r + 1$	$r + 2$	$r + 2$	$r + 3$

(6.11)

Cas $C_{12}(r)$. Les fonctions k_1, k_2, k_3 de s (ou de σ_1 ou bien de σ_2 ou enfin de σ_4) sont de classe r; les fonctions k_1/k_2, k_1/k_3 de σ_1 (ou de σ_2 ou de σ_3) sont de classe $r + 1$; la fonction k_2/k_3 de σ_2 (ou de σ_3) est de classe $r + 2$. Les classes différentielles de C relatives à $t = s$, $t = \sigma_1$, $t = \sigma_2$, $t = \sigma_3$ sont données par le tableau (6.12).

	X	T_1	T_2	T_3
$t = s$	$r + 2$	$r + 1$	$r + 1$	$r + 1$
$t = \sigma_1$	$r + 1$	$r + 2$	$r + 2$	$r + 2$
$t = \sigma_2$	$r + 1$	$r + 2$	$r + 3$	$r + 3$
$t = \sigma_3$	$r + 1$	$r + 2$	$r + 3$	$r + 4$

(6.12)

Cas $C_{13}(r)$. Les fonctions k_1, k_2, k_3 de s (ou de σ_1 ou bien de σ_2 ou enfin de σ_3) sont de classe r; les fonctions k_1/k_2, k_1/k_3 de σ_1 (ou de σ_2 ou de σ_3) sont de classe $r + 1$; la fonction k_2/k_3 de σ_2 (ou de σ_2) est de classe $\geqq r + 3$. Les classes différentielles de C relatives à $t = s$, $t = \sigma_1$, $t = \sigma_2$, $t = \sigma_3$ sont données par le tableau (6.13).

	X	T_1	T_2	T_3
$t = s$	$r + 2$	$r + 1$	$r + 1$	$r + 1$
$t = \sigma_1$	$r + 1$	$r + 2$	$r + 2$	$r + 2$
$t = \sigma_2$	$r + 1$	$r + 2$	$r + 3$	$r + 4$
$t = \sigma_3$	$r + 1$	$r + 2$	$r + 3$	$r + 4$

(6.13)

Cas $C_2(r)$. Les fonctions k_1, k_2, k_3 de s (ou de σ_1 ou bien de σ_2 ou enfin de σ_3) sont de classe r; les fonctions k_1/k_3, k_2/k_3 de σ_1 (ou de σ_2 ou de σ_3) sont de classe $r + 1$; la fonction k_1/k_2 de σ_1 (ou de σ_2 ou de σ_3) est de classe $\geqq r + 2$. Les classes différentielles de C relatives à $t = s$, $t = \sigma_1$, $t = \sigma_2$, $t = \sigma_2$ sont données par le tableau (6.14).

	X	T_1	T_2	T_3
$t = s$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$
$t = \sigma_1$	$r+1$	$r+2$	$r+3$	$r+2$
$t = \sigma_2$	$r+1$	$r+2$	$r+3$	$r+2$
$t = \sigma_3$	$r+1$	$r+2$	$r+2$	$r+3$

(6.14)

Cas $C_3(r)$. Les fonctions k_1, k_2, k_3 de s (ou de σ_1 ou bien de σ_2 ou enfin de σ_4) sont de classe r; les fonctions k_1/k_2, k_2/k_3 de σ_1 (ou de σ_2 ou de σ_3) sont de classe $r + 1$; la fonction k_1/k_3, de σ_1 (ou de σ_2 ou de σ_3) est de clases $\geqq r + 2$. Les classes différentielles de C relatives à $t = s$, $t = \sigma_1$, $t = \sigma_2$, $t = \sigma_3$ sont données par le tableau

	X	T_1	T_2	T_3
$t = s$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$
$t = \sigma_1$	$r+1$	$r+2$	$r+2$	$r+3$
$t = \sigma_2$	$r+1$	$r+2$	$r+3$	$r+2$
$t = \sigma_3$	$r+1$	$r+2$	$r+2$	$r+3$

(6.15)

Cas $C_{41}(r)$. Les fonctions k_1, k_2, k_3 de s (ou de σ_1 ou bien de σ_2 ou enfin de σ_3) sont de classe r; les fonctions k_1/k_3, k_2/k_3 de σ_1 (ou de σ_2 ou de σ_3) sont de classe $r + 2$; la fonction k_1/k_2 de σ_1 (ou de σ_2 ou de σ_3) est de classe $\geqq r + 2$. Les classes différentielles de C relatives à $t = s$, $t = \sigma_1$, $t = \sigma_2$, $t = \sigma_3$ sont données par le tableau (6.16).

	X	T_1	T_2	T_3
$t = s$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$
$t = \sigma_1$	$r+1$	$r+2$	$r+3$	$r+3$
$t = \sigma_2$	$r+1$	$r+2$	$r+3$	$r+3$
$t = \sigma_3$	$r+1$	$r+2$	$r+3$	$r+4$

(6.16)

Cas $C_{42}(r)$. Les fonctions k_1, k_2, k_3 de s (ou de σ_1 ou bien de σ_2 ou enfin de σ_3) sont de classe r); la fonction k_1/k_3 de σ_1 (ou de σ_2 ou de σ_3) est de classe $r + 2$; la fonction k_1/k_2 de σ_1 (ou de σ_2 ou de σ_3) est de classe $\geqq r + 2$; la fonction k_2/k_3 de σ_1 (ou de σ_2 ou de σ_3) est de classe $\geqq r + 3$. Les classes différentielles de C relatives à $t = s$, $t = \sigma_1$, $\iota = \sigma_2$, $t = \sigma_3$ sont données par le tableau (6.17).

	X	T_1	T_2	T_3
$t = s$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$
$t = \sigma_1$	$r+1$	$r+2$	$r+3$	$r+3$
$t = \sigma_2$	$r+1$	$r+2$	$r+3$	$r+4$
$t = \sigma_3$	$r+1$	$r+2$	$r+3$	$r+4$

(6.17)

Cas $C_{51}(r)$. Les fonctions k_1, k_2, k_3 de s (ou de σ_1 ou bien de σ_2 ou enfin de σ_3) sont de classe r; la fonction k_2/k_3 de σ_1 (ou de σ_2 ou de σ_3) est de classe $r + 2$; la fonction k_1/k_2 de σ_1 (ou de σ_2 ou de σ_3) est de classe $\geqq r + 2$; la fonction k_1/k_3 de σ_1 (ou de σ_2 ou de σ_3) est de classe $\geqq r + 3$. Les classes différentielles de C relatives à $t = s$, $t = \sigma_1$, $t = \sigma_2$, $t = \sigma_3$ sont données par le tableau (6.18).

	X	T_1	T_2	T_3
$t = s$	$r + 2$	$r + 1$	$r + 1$	$r + 1$
$t = \sigma_1$	$r + 1$	$r + 2$	$r + 3$	$r + 4$
$t = \sigma_2$	$r + 1$	$r + 2$	$r + 3$	$r + 3$
$t = \sigma_3$	$r + 1$	$r + 2$	$r + 3$	$r + 4$

(6.18)

Cas $C_{52}(r)$. Les fonctions k_1, k_2, k_3 de s (ou de σ_1 ou bien de σ_2 ou enfin de σ_3) sont de classe r; la fonction k_1/k_2 de σ_1 (ou de σ_2 ou de σ_3) est de classe $\geqq r + 2$; les fonctions k_1/k_3, k_2/k_3 de σ_1 (ou de σ_2 ou de σ_3) sont de classes $\geqq r + 3$. Les classes différentielles de C relatives à $t = s$, $t = \sigma_1$, $t = \sigma_2$, $t = \sigma_3$ sont données par le tableau (6.19).

	X	T_1	T_2	T_3
$t = s$	$r + 2$	$r + 1$	$r + 1$	$r + 1$
$t = \sigma_1$	$r + 1$	$r + 2$	$r + 3$	$r + 4$
$t = \sigma_2$	$r + 1$	$r + 2$	$r + 3$	$r + 4$
$t = \sigma_3$	$r + 1$	$r + 2$	$r + 3$	$r + 4$

(6.19)

Cas $D_{11}(r)$. Les fonctions k_2, k_3, k_1/k_2, k_1/k_3, k_2/k_3 de s (ou de σ_1 ou bien de σ_2 ou enfin de σ_3) sont de classe r; la fonction k_1 de s (ou de σ_1) est de classe $r + 1$. Les classes différentielles de C relatives à $t = s$, $t = \sigma_1$, $t = \sigma_2$, $t = \sigma_3$ sont données par le tableau (6.20).

	X	T_1	T_2	T_3
$t = s$	$r + 3$	$r + 2$	$r + 1$	$r + 1$
$t = \sigma_1$	$r + 2$	$r + 2$	$r + 1$	$r + 1$
$t = \sigma_2$	$r + 1$	$r + 1$	$r + 2$	$r + 1$
$t = \sigma_3$	$r + 1$	$r + 1$	$r + 1$	$r + 2$

(6.20)

Cas $D_{12}(r)$. Les fonctions k_2, k_3, k_1/k_2, k_1/k_3, k_2/k_3 de s (ou de σ_1 ou bien de σ_2 ou enfin de σ_3) sont de classe r; la fonction k_1 de s (ou de σ_1) est de classe $\geqq r + 2$. Les classes différentielles de C relatives à $t = s$, $t = \sigma_1$, $t = \sigma_2$, $t = \sigma_3$ sont données par le tableau (6.21).

	X	T_1	T_2	T_3
$t = s$	$r+3$	$r+2$	$r+1$	$r+1$
$t = \sigma_1$	$r+3$	$r+2$	$r+1$	$r+1$
$t = \sigma_2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$
$t = \sigma_3$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$

(6.21)

Cas $D_2(r)$. Les fonctions $k_1, k_2, k_3, k_1/k_2, k_1/k_3, k_2/k_3$ de s (ou de σ_1 ou bien de σ_2 ou enfin de σ_3) sont de classe r à l'exception de k_2 qui est de classe $\geqq r+1$. Les classes différentielles de C relatives à $t = s$, $t = \sigma_1$, $t = \sigma_2$, $t = \sigma_3$ sont données par le tableau (6.22).

	X	T_1	T_2	T_3
$t = s$	$r+2$	$r+1$	$r+2$	$r+1$
$t = \sigma_1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$
$t = \sigma_2$	$r+2$	$r+1$	$r+2$	$r+1$
$t = \sigma_3$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$

(6.22)

Cas $D_3(r)$. Les fonctions $k_1, k_2, k_3, k_1/k_2, k_1/k_3, k_2/k_3$ de s (ou de σ_1 ou bien de σ_2 ou enfin de σ_3) sont de classe r à l'exception de k_3 qui est de classe $\geqq r+1$. Les classes différentielles de C relatives à $t = s$, $t = \sigma_1$, $t = \sigma_2$, $t = \sigma_3$ sont données par le tableau (6.23).

	X	T_1	T_2	T_3
$t = s$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$
$t = \sigma_1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$
$t = \sigma_2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$
$t = \sigma_3$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$

(6.23)

Cas $E_{111}(r)$. Les fonctions $k_2, k_3, k_1/k_2, k_1/k_3$ de s (on de σ_1 ou bien de σ_2 ou enfin de σ_2) sont de classe r; la fonction k_1 de s (ou de σ_1) est de classe $r+1$; la fonction k_2/k_3 de σ_2 (ou de σ_3) est de classe $r+1$. Les classes différentielles de C relatives à $t = s$, $t = \sigma_1$, $t = \sigma_2$, $t = \sigma_3$ sont données par le tableau (6.24).

	X	T_1	T_2	T_3
$t = s$	$r+3$	$r+2$	$r+1$	$r+1$
$t = \sigma_1$	$r+2$	$r+2$	$r+1$	$r+1$
$t = \sigma_2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+2$
$t = \sigma_3$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+3$

(6.24)

Cas $E_{112}(r)$. Les fonctions k_2, k_3, k_1/k_2, k_1/k_3 de s (ou de σ_1 ou bien de σ_2 ou enfin de σ_3) sont de classe r; la fonction k_1 de s (ou de σ_1) est de classe $r+1$; la fonction k_2/k_3 de σ_2 (ou de σ_3) est de classe $\geqq r+2$. Les classes différentielles de C relatives *à* $t=s$, $t=\sigma_1$, $t=\sigma_2$, $t=\sigma_3$ sont données par le tableau (6.25).

	X	T_1	T_2	T_3
$t=s$	$r+3$	$r+2$	$r+1$	$r+1$
$t=\sigma_1$	$r+2$	$r+2$	$r+1$	$r+1$
$t=\sigma_2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+3$
$t=\sigma_3$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+3$

(6.25)

Cas $E_{121}(r)$. Les fonctions k_2, k_3, k_1/k_2, k_1/k_3 de s (ou de σ_1 ou bien de σ_2 ou enfin de σ_3) sont de classe r; la fonction k_2/k_3 de σ_2 (ou de σ_3) est de classe $r+1$; la fonction k_1 de s (ou de σ_1) est de classe $\geqq r+2$. Les classes différentielles de C relatives à $t=s$, $t=\sigma_1$, $t=\sigma_2$, $t=\sigma_3$ sont données par le tableau (6.26).

	X	T_1	T_2	T_3
$t=s$	$r+3$	$r+2$	$r+1$	$r+1$
$t=\sigma_1$	$r+3$	$r+2$	$r+1$	$r+1$
$t=\sigma_2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+2$
$t=\sigma_3$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+3$

(6.26)

Cas $E_{122}(r)$. Les fonctions k_2, k_3, k_1/k_2, k_1/k_3 de s (ou de σ_1 ou bien de σ_2 ou enfin de σ_3) sont de classe r; la fonction k_1 de s (ou de σ_1) est de classe $\geqq r+2$; la fonction k_2/k_3 de σ_2 (ou de σ_3) est de classe $\geqq r+2$. Les classes différentielles de C relatives à $t=s$, $t=\sigma_1$, $t=\sigma_2$, $t=\sigma_3$ sont données par le tableau (6.27).

	X	T_1	T_2	T_3
$t=s$	$r+3$	$r+2$	$r+1$	$r+1$
$t=\sigma_1$	$r+3$	$r+2$	$r+1$	$r+1$
$t=\sigma_2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+3$
$t=\sigma_3$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+3$

(6.27)

Cas $E_2(r)$. Les fonctions k_1, k_2, k_3, k_1/k_2, k_1/k_3, k_2/k_3 de s (ou de σ_1 ou bien de σ_2 ou enfin de σ_3) sont de classe r à l'exception de k_2 et k_1/k_3 qui sont de classe $\geqq r+1$. Les classes différentielles de C relatives à $t=s$, $t=\sigma_1$, $t=\sigma_2$, $t=\sigma_3$ sont données par le tableau (6.28).

	X	T_1	T_2	T_3
$t = s$	$r + 2$	$r + 1$	$r + 2$	$r + 1$
$t = \sigma_1$	$r + 1$	$r + 2$	$r + 1$	$r + 2$
$t = \sigma_2$	$r + 2$	$r + 1$	$r + 2$	$r + 1$
$t = \sigma_3$	$r + 1$	$r + 2$	$r + 1$	$r + 2$

(6.28)

Cas $E_3(r)$. Les fonctions k_1, k_2, k_3, k_1/k_2, k_1/k_3, k_2/k_3 de s (ou de σ_1 ou bien de σ_2 ou enfin de σ_3) sont de classe r à l'exception de k_3 et k_1/k_2 qui sont de classe $\geqq r + 1$. Les classes différentielles de C relatives à $t = s$, $t = \sigma_1$, $t = \sigma_2$, $t = \sigma_3$ sont données par le tableau (6.29).

	X	T_1	T_2	T_3
$t = s$	$r + 2$	$r + 1$	$r + 1$	$r + 2$
$t = \sigma_1$	$r + 1$	$r + 2$	$r + 2$	$r + 1$
$t = \sigma_2$	$r + 1$	$r + 2$	$r + 2$	$r + 1$
$t = \sigma_3$	$r + 2$	$r + 1$	$r + 1$	$r + 2$

(6.29)

Cas $F_{111}(r)$. Les fonctions k_3, k_1/k_3, k_2/k_3 de s (ou de σ_1 ou bien de σ_2 ou enfin de σ_3) sont de classe r; les fonctions k_1, k_2, k_1/k_2 de s (ou de σ_1 ou de σ_2) sont de classe $r + 1$. Les classes différentielles de C relatives à $t = s$, $t = \sigma_1$, $t = \sigma_2$, $t = \sigma_3$ sont données par le tableau (6.30).

	X	T_1	T_2	T_3
$t = s$	$r + 3$	$r + 2$	$r + 2$	$r + 1$
$t = \sigma_1$	$r + 2$	$r + 3$	$r + 2$	$r + 1$
$t = \sigma_2$	$r + 2$	$r + 2$	$r + 2$	$r + 1$
$t = \sigma_3$	$r + 1$	$r + 1$	$r + 1$	$r + 2$

(6.30)

Cas $F_{112}(r)$. Les fonctions k_3, k_1/k_3, k_2/k_3 de s (ou de σ_1 ou bien de σ_2 ou enfin de σ_3) sont de classe r; les fonctions k_2, k_1/k_2 de s (ou de σ_1 ou de σ_2) sont de classe $r + 1$; la fonction k_1 de s (ou de σ_1) est de classe $r + 2$. Les classes différentielles de C relatives à $t = s$, $t = \sigma_1$, $t = \sigma_2$, $t = \sigma_3$ sont données par le tableau (6.31).

	X	T_1	T_2	T_3
$t = s$	$r + 4$	$r + 3$	$r + 2$	$r + 1$
$t = \sigma_1$	$r + 3$	$r + 3$	$r + 2$	$r + 1$
$t = \sigma_2$	$r + 2$	$r + 2$	$r + 2$	$r + 1$
$t = \sigma_3$	$r + 1$	$r + 1$	$r + 1$	$r + 2$

(6.31)

Cas $F_{113}(r)$. Les fonctions k_3, k_1/k_3, k_2/k_3 de s (ou de σ_1 ou bien de σ_2 ou enfin de σ_3) sont de classe r: les fonctions k_2, k_1/k_2 de s (ou de σ_1 ou de σ_2) sont de classe $r + 1$; la fonction k_1 de s (ou de σ_1) est de classe $\geqq r + 3$. Les classes différentielles de C relatives à $t = s$, $t = \sigma_1$, $t = \sigma_2$, $t = \sigma_3$ sont données par le tableau (6.32).

	X	T_1	T_2	T_3
$t = s$	$r + 4$	$r + 3$	$r + 2$	$r + 1$
$t = \sigma_1$	$r + 4$	$r + 3$	$r + 2$	$r + 1$
$t = \sigma_2$	$r + 2$	$r + 2$	$r + 2$	$r + 1$
$t = \sigma_3$	$r + 1$	$r + 1$	$r + 1$	$r + 2$

(6.32)

Cas $F_{12}(r)$. Les fonctions k_3, k_1/k_3, k_2/k_3 de s (ou de σ_1 ou bien de σ_2 ou enfin de σ_3) sont de classe r; les fonctions k_1, k_1/k_2 de s (ou de σ_1 ou de σ_2) sont de classe $r + 1$; la fonction k_2 de s (ou de σ_1 ou de σ_2) est de classe $\geqq r + 2$. Les classes différentielles de C relatives à $t = s$, $t = \sigma_1$, $t = \sigma_2$, $t = \sigma_3$ sont données par le tableau (6.33).

	X	T_1	T_2	T_3
$t = s$	$r + 3$	$r + 2$	$r + 2$	$r + 1$
$t = \sigma_1$	$r + 2$	$r + 3$	$r + 2$	$r + 1$
$t = \sigma_2$	$r + 3$	$r + 2$	$r + 2$	$r + 1$
$t = \sigma_3$	$r + 1$	$r + 1$	$r + 1$	$r + 2$

(6.33)

Cas $F_{13}(r)$. Les fonctions k_3, k_1/k_3, k_2/k_3 de s (ou de σ_1 ou bien de σ_2 ou enfin de σ_3) sont de classe r; les fonctions k_1, k_2 de s (ou de σ_1 ou de σ_2) sont de classe $r + 1$; la fonction k_1/k_2 de s (ou de σ_1 ou de σ_2) est de classe $\geqq r + 2$. Les classes différentielles de C relatives à $t = s$, $t = \sigma_1$, $t = \sigma_2$, $t = \sigma_3$ sont données par le tableau (6.34).

	X	T_1	T_2	T_3
$t = s$	$r + 3$	$r + 2$	$r + 2$	$r + 1$
$t = \sigma_1$	$r + 2$	$r + 3$	$r + 2$	$r + 1$
$t = \sigma_2$	$r + 2$	$r + 3$	$r + 2$	$r + 1$
$t = \sigma_3$	$r + 1$	$r + 1$	$r + 1$	$r + 2$

(6.34)

Cas $F_{141}(r)$. Les fonctions k_3, k_1/k_3, k_2/k_3 de s (ou de σ_1 ou bien de σ_2 ou enfin de σ_3) sont de classe r, les fonctions k_1, k_2 de s (ou de σ_1 ou de σ_2) sont de classe $r + 2$; la fonction k_1/k_2 de s (ou de σ_1 ou de σ_2) est de classe $\geqq r + 2$. Les classes différentielles de C relatives à $t = s$, $t = \sigma_1$, $t = \sigma_2$, $t = \sigma_3$ sont données par le tableau (6.35).

	X	T_1	T_2	T_3
$t = s$	$r+4$	$r+3$	$r+2$	$r+1$
$t = \sigma_1$	$r+3$	$r+3$	$r+2$	$r+1$
$t = \sigma_2$	$r+3$	$r+3$	$r+2$	$r+1$
$t = \sigma_3$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$

(6.35)

Cas $F_{142}(r)$. Les fonctions k_3, k_1/k_3, k_2/k_3 de s (ou de σ_1 ou bien de σ_2 ou enfin de σ_3) sont de classe r; les fonctions k_2, k_1/k_2 de s (ou de σ_1 ou de σ_2) sont de classe $r + 2$; la fonction k_1 de s (ou de σ_1 ou de σ_2) est de classe $\geqq r + 3$. Les classes différentielles de C relatives à $t = s$, $t = \sigma_1$, $t = \sigma_2$, $t = \sigma_3$ sont données par le tableau (6.36).

	X	T_1	T_2	T_3
$t = s$	$r+4$	$r+3$	$r+2$	$r+1$
$t = \sigma_1$	$r+4$	$r+3$	$r+2$	$r+1$
$t = \sigma_2$	$r+3$	$r+3$	$r+2$	$r+1$
$t = \sigma_3$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$

(6.36)

Cas $F_{151}(r)$. Les fonctions k_3, k_1/k_3, k_2/k_3 de s (ou de σ_1 ou bien de σ_2 ou enfin de σ_3) sont de classe r; les fonctions k_1, k_1/k_2 de s (ou de σ_1 ou de σ_2) sont de classe $r + 2$; la fonction k_2 de s (ou de σ_1 ou de σ_2) est de classe $\geqq r + 3$. Les classes différentielles de C relatives à $t = s$, $t = \sigma_1$, $t = \sigma_2$, $t = \sigma_3$ sont données par le tableau (6.37).

	X	T_1	T_2	T_3
$t = s$	$r+4$	$r+3$	$r+2$	$r+1$
$t = \sigma_1$	$r+3$	$r+3$	$r+2$	$r+1$
$t = \sigma_2$	$r+4$	$r+3$	$r+2$	$r+1$
$t = \sigma_3$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$

(6.37)

Cas $F_{152}(r)$. Les fonctions k_3, k_1/k_3, k_2/k_3 de s (ou de σ_1 ou bien de σ_2 ou enfin de σ_3) sont de classe r; les fonctions k_1, k_2, k_1/k_2 de s (ou de σ_1 ou de σ_2) sont de classe $\geqq r + 3$. Les classes différentielles de C relatives à $t = s$, $t = \sigma_1$, $t = \sigma_2$, $t = \sigma_3$ sont données par le tableau (6.38).

	X	T_1	T_2	T_3
$t = s$	$r+4$	$r+3$	$r+2$	$r+1$
$t = \sigma_1$	$r+4$	$r+3$	$r+2$	$r+1$
$t = \sigma_2$	$r+4$	$r+3$	$r+2$	$r+1$
$t = \sigma_3$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$

(6.38)

Cas $F_{211}(r)$. Les fonctions k_2, k_1/k_2, k_1/k_3, k_2/k_3 de s (ou de σ_1 ou bien de σ_2 ou enfin de σ_3) sont de classe r à l'exception de k_1/k_3 qui est de classe $\geqq r + 1$; les fonctions k_1, k_3 de s (ou de σ_1 ou de σ_3) sont de classe $r + 1$. Les classes différentielles de C relatives à $t = s$, $t = \sigma_1$, $t = \sigma_2$, $t = \sigma_3$ sont données par le tableau (6.39).

	X	T_1	T_2	T_3
$t = s$	$r + 3$	$r + 2$	$r + 1$	$r + 2$
$t = \sigma_1$	$r + 2$	$r + 2$	$r + 1$	$r + 2$
$t = \sigma_2$	$r + 1$	$r + 1$	$r + 2$	$r + 1$
$t = \sigma_3$	$r + 2$	$r + 2$	$r + 1$	$r + 2$

(6.39)

Cas $F_{212}(r)$. Les fonctions k_2, k_1/k_2, k_2/k_3 de s (ou de σ_1 ou bien de σ_2 ou enfin de σ_3) sont de classe r; les fonctions k_1, k_1/k_3 de s (ou de σ_1 ou de σ_3) sont de classe $r + 1$; la fonction k_3 de s (ou de σ_1 ou de σ_3) est de classe $\geqq r + 2$. Les classes différentielles de C relatives à $t = s$, $t = \sigma_1$, $t = \sigma_2$, $t = \sigma_3$ sont données par le tableau (6.40).

	X	T_1	T_2	T_3
$t = s$	$r + 3$	$r + 2$	$r + 1$	$r + 2$
$t = \sigma_1$	$r + 2$	$r + 2$	$r + 1$	$r + 2$
$t = \sigma_2$	$r + 1$	$r + 1$	$r + 2$	$r + 1$
$t = \sigma_3$	$r + 3$	$r + 2$	$r + 1$	$r + 2$

(6.40)

Cas $F_{221}(r)$. Les fonctions k_2, k_1/k_2, k_2/k_3 de s (on de σ_1 ou bien de σ_2 ou enfin de σ_3) sont de classe r; les fonctions k_3, k_1/k_3 de s (ou de σ_1 ou de σ_3) sont de classe $r + 1$; la fonction k_1 de s (ou de σ_1 ou de σ_3) est de classe $\geqq r + 2$. Les classes différentielles de C relatives à $t = s$, $t = \sigma_1$, $t = \sigma_2$, $t = \sigma_3$ sont données par le tableau (6.41).

	X	T_1	T_2	F_3
$t = s$	$r + 3$	$r + 2$	$r + 1$	$r + 2$
$t = \sigma_1$	$r + 3$	$r + 2$	$r + 1$	$r + 2$
$t = \sigma_2$	$r + 1$	$r + 1$	$r + 2$	$r + 1$
$t = \sigma_3$	$r + 2$	$r + 2$	$r + 1$	$r + 2$

(6.41)

Cas $F_{222}(r)$. Les fonctions k_2, k_1/k_2, k_1/k_3, k_2/k_3 de s (ou de σ_1 ou bien de σ_2 ou enfin de σ_3) sont de classe r à l'exception de k_1/k_3 qui est de classe r à l'exception de k_1/k_3 qui est de classe $\geqq r + 1$; les fonctions k_1, k_3 de s (ou de σ_1 ou de σ_3) sont de classes $\geqq r + 2$. Les classes différentielles de C relatives à $t = s$, $t = \sigma_1$, $t = \sigma_2$, $t = \sigma_3$ sont données par le tableau (6.42).

	X	T_1	T_2	T_3
$t = s$	$r + 3$	$r + 2$	$r + 1$	$r + 2$
$t = \sigma_1$	$r + 3$	$r + 2$	$r + 1$	$r + 2$
$t = \sigma_2$	$r + 1$	$r + 1$	$r + 2$	$r + 1$
$t = \sigma_3$	$r + 3$	$r + 2$	$r + 1$	$r + 2$

(6.42)

Cas $F_{311}(r)$. Les fonctions k_1, k_2, k_1/k_2, k_1/k_3 de s (ou de σ_1 ou bien de σ_2 ou enfin de σ_3) sont de classe r à l'exception de k_2 qui est de classe $\geqq r + 1$; les fonctions k_3, k_2/k_3 de s (ou de σ_2 ou de σ_3) sont de classe $r + 1$. Les classes différentielles de C relatives à $t = s$, $t = \sigma_1$, $t = \sigma_2$, $t = \sigma_2$ sont données par le tableau (6.43).

	X	T_1	T_2	T_3
$t = s$	$r + 2$	$r + 1$	$r + 2$	$r + 2$
$t = \sigma_1$	$r + 1$	$r + 2$	$r + 1$	$r + 1$
$t = \sigma_2$	$r + 2$	$r + 1$	$r + 2$	$r + 2$
$t = \sigma_3$	$r + 2$	$r + 1$	$r + 2$	$r + 3$

(6.43)

Cas $F_{312}(r)$. Les fonctions k_1, k_1/k_2, k_1/k_3 de s (ou de σ_1 ou bien de σ_2 ou enfin de σ_3) sont de classe r; les fonctions k_2, k_3 de s (ou de σ_2 ou de σ_3) sont de classe $r + 1$; la fonction k_2/k_3 de s (ou de σ_2 ou de σ_3) est de classe $\geqq r + 2$. Les classes différentielles de C relatives à $t = s$, $t = \sigma_1$, $t = \sigma_2$, $t = \sigma_3$ sont données par le tableau (6.44).

	X	T_1	T_2	T_3
$t = s$	$r + 2$	$r + 1$	$r + 2$	$r + 2$
$t = \sigma_1$	$r + 1$	$r + 2$	$r + 1$	$r + 1$
$t = \sigma_2$	$r + 2$	$r + 1$	$r + 2$	$r + 3$
$t = \sigma_3$	$r + 2$	$r + 1$	$r + 2$	$r + 3$

(6.44)

Cas $\mathrm{F}_{321}(r)$. Les fonctions k_1, k_1/k_2, k_1/k_3 de s (ou de σ_1 ou bien de σ_2 ou enfin de σ_3) sont de classe r; les fonctions k_2, k_2/k_3 de s (ou de σ_2 ou de σ_3) sont de classe $r + 1$; le fonction k_3 de s (ou de σ_2 ou de σ_3) est de classe $\geqq r + 2$. Les classes différentielles de C relatives à $t = s$, $t = \sigma_1$, $t = \sigma_2$, $t = \sigma_3$ sont données par le tableau (6.45).

	X	T_1	T_2	T_3
$t = s$	$r + 2$	$r + 1$	$r + 2$	$r + 3$
$t = \sigma_1$	$r + 1$	$r + 2$	$r + 1$	$r + 1$
$t = \sigma_2$	$r + 2$	$r + 1$	$r + 2$	$r + 2$
$t = \sigma_3$	$r + 2$	$r + 1$	$r + 2$	$r + 3$

(6.45)

Cas $F_{322}(r)$. Les fonctions k_1, k_1/k_2, k_1/k_3 de s (ou de σ_1 ou bien de σ_2 ou enfin de σ_3) sont de classe r; les fonctions k_2, k_3, k_2/k_3 de s (ou de σ_2 ou de σ_3) sont de classes $\geqq r + 2$. Les classes différentielles de C relatives à $t = s$, $t = \sigma_1$, $t = \sigma_2$, $t = \sigma_3$ sont données par le tableau (6.46).

	X	T_1	T_2	T_3
$t = s$	$r + 2$	$r + 1$	$r + 2$	$r + 3$
$t = \sigma_1$	$r + 1$	$r + 2$	$r + 1$	$r + 1$
$t = \sigma_2$	$r + 2$	$r + 1$	$r + 2$	$r + 3$
$t = \sigma_3$	$r + 2$	$r + 1$	$r + 2$	$r + 3$

(6.46)

En résumé, on voit qu'il existe au total 41 familles (contenant le paramètre entier $r \geqq 0$) de types différentiels des courbes de l'espace à 4 dimensions.

Резюме

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА КРИВОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ДВУХ, ТРЕХ ИЛИ ЧЕТЫРЕХ ИЗМЕРЕНИЙ

ЭДУАРД ЧЕХ (Eduard Čech), Прага.

(Поступило в редакцию 2/V 1957 г.)

О функции $f = f(t)$ мы говорим, что она принадлежит *дифференциальному классу* $\geqq r$ ($r \geqq 0$) и пишем $\mathrm{cl}\, f \geqq r$, если она обладает непрерывной производной порядка r. Дифференциальным классом векторной функции является минимум дифференциальных классов ее скалярных составляющих.

Кривую C евклидова E_n, являющуюся геометрическим местом точек $X = X(t)$, мы назовем *регулярной* (а параметр t регулярным), если имеют место формулы Френе (1.1) + (1.2), где K_i ($0 \leqq i \leqq n - 1$) — непрерывные функции переменного t, отличные всюду от нуля. Если k_i ($1 \leqq i \leqq n - 1$) представляют собой кривизны кривой C, то будет

$$K_0 : K_1 : \ldots : K_{n-1} = 1 : k_1 : \ldots : k_{n-1} .$$

Кроме переменной точки X мы рассматриваем также касательную T_1, соприкасающуюся плоскость $T_2, \ldots,$ соприкасающееся $(n - 1)$-пространство T_{n-1}. Их дифференциальные классы определяются соотношениями (1.4).

Под *дифференциальным классом кривой* C по отношению к параметру t мы подразумеваем конечную последовательность (1.3). В случае $\mathrm{cl}\, X = \infty$

все члены последовательности (1.3) равны ∞; этот тривиальный случай в дальнейшем исключается. Дифференциальный класс (1.3) не изменяется при проективном преобразовании пространства E_n; при двойственном преобразовании класс (1.3) переходит в $(\mathrm{cl}\, T_{n-1}, \ldots, \mathrm{cl}\, T_1, \mathrm{cl}\, X)$. Для $n = 2$ имеет место в предположении (2.1):

для $r_0 \geqq r_1 + 1$: $\mathrm{cl}\, X = r_1 + 2$, $\mathrm{cl}\, T_1 = r_1 + 1$;
для $r_1 \geqq r_0 + 1$: $\mathrm{cl}\, X = r_0 + 1$, $\mathrm{cl}\, T_1 = r_0 + 2$;
для $r_0 = r_1 = r$: $\mathrm{cl}\, X = \mathrm{cl}\, T_1 = r + 1$.

Для $n = 3$ числа $\mathrm{cl}\, K_i$ $(0 \leqq i \leqq 2)$ определяют дифференциальный класс (1.3) согласно таблице (3.8). Для $n = 4$ числа $\mathrm{cl}\, K_i$ $(0 \leqq i \leqq 3)$ определяют дифференциальный класс (1.3) согласно таблицам (5.12), (5.12′), (5.12″). Случаи (5.12) двойственны самим себе; случаи (5.12″) двойственны случаям (5.12′).

Дифференциальный класс (1.3) зависит от выбора регулярного параметра t. Если при каком-либо выборе t имеет место

$$\max(\mathrm{cl}\, X, \mathrm{cl}\, T_1, \ldots, \mathrm{cl}\, T_{n-1}) = m\,,$$

то при переходе к другому регулярному параметру τ класс (1.3) не изменится тогда и только тогда, если $\mathrm{cl}\, \tau(t) \geqq m$. Число $\mathrm{cl}\, X$ максимально для $t = s$, где s — дуга кривой C; для $1 \leqq i \leqq n - 1$ число $\mathrm{cl}\, T_i$ будет максимальным при $t = \sigma_i = \int k_i\, \mathrm{d}s$. Отсюда следует, что важно знать дифференциальный класс (1.3) для

$$t = s\,, \quad t = \sigma_1, \ldots, t = \sigma_{n-1}\,, \tag{*}$$

Назовем *дифференциальным типом кривой C* таблицу дифференциальных классов при значениях параметра t, выбранных согласно (*). Пусть для $n = 2$ будет $\mathrm{cl}\, k_1(s) = r$; тогда дифференциальный тип кривой C дан выражением (2.2).

Для $n = 3$ имеется шесть возможностей

$$A(r), B(r), C_1(r), C_2(r), D_1(r), D_2(r) \quad (r = 0, 1, 2, \ldots)\,.$$

В случае $A(r)$ имеем

$$\mathrm{cl}\, k_1(s) = \mathrm{cl}\, k_2(s) = \mathrm{cl}\, \frac{k_1(s)}{k_2(s)} = r$$

и дифференциальный тип имеет вид (4.4). В случае $B(r)$ имеем

$$\mathrm{cl}\, k_1(s) = \mathrm{cl}\, \frac{k_1(s)}{k_2(s)} = r\,, \quad \mathrm{cl}\, k_2(s) \geqq r + 1\,;$$

дифференциальный тип имеет вид (4.5). В случае $C_1(r)$ имеем

$$\mathrm{cl}\, k_1(s) = \mathrm{cl}\, k_2(s) \doteq r\,, \quad \mathrm{cl}\, \frac{k_1(\sigma_1)}{k_2(\sigma_1)} = r + 1\,;$$

дифференциальный тип имеет вид (4.6). В случае $C_2(r)$ имеем

$$\mathrm{cl}\, k_2(s) = \mathrm{cl}\, \frac{k_1(s)}{k_2(s)} = r\,, \quad \mathrm{cl}\, k_1(\sigma_1) = r + 1\,;$$

дифференциальный тип имеет вид (4.7). В случае $D_1(r)$ имеем

$$\mathrm{cl}\, k_1(s) = \mathrm{cl}\, k_2(s) = r\,, \quad \mathrm{cl}\, \frac{k_1(\sigma_1)}{k_2(\sigma_2)} \geqq r + 2\,;$$

дифференциальный тип имеет вид (4.8). В случае $D_2(r)$ имеем

$$\mathrm{cl}\, k_2(s) = \mathrm{cl}\, \frac{k_1(s)}{k_2(s)} = r\,, \quad \mathrm{cl}\, k_1(\sigma_1) \geqq r + 2\,;$$

дифференциальный тип имеет вид (4.9).

В случае $n = 4$ имеется для любого $r = 0, 1, 2, \ldots$ всего 41 возможность. Дифференциальный тип дан таблицами (6.6)—(6.46); перед каждой таблицей приведены условия для дифференциальных классов величин

$$k_1,\, k_2,\, k_3,\, k_1/k_2,\, k_1/k_3,\, k_2/k_3\,,$$

которые мы считаем функциями какой-нибудь (надлежащим образом выбранной) из величин s, σ_1, σ_2, σ_3.