Czechoslovak Mathematical Journal

Josef Král; Jiří Marek

Преобразование интеграла Стильтьеса-Лебега

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 8 (1958), No. 1, 86–93

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100279

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1958

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

Чехословацкий математический журнал, т. 8 (83) 1958, Прага

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИНТЕГРАЛА СТИЛЬТЬЕСА-ЛЕБЕГА

ИОСЕФ КРАЛ (Josef Král) и ИРЖИ МАРЕК (Jiří Marek), Прага

(Поступило в редакцию 27/IV 1957 г.)

Из теорем, приведённых в этой статье вытекает, в частности, что формула

$$\int_{f(a)}^{f(b)} \Phi(y)\mathrm{d}g(y) = \int_a^b \Phi(f(x))\mathrm{d}g(f(x))$$

справедлива при достаточно общих предположениях о функциях Φ, g, f.

1. В дальнейшем будет E_1 означать множество всех конечных действительных чисел. Под словом „функция" подразумевается обыкновенно конечная действительная функция одного действительного переменного. Если мы допустим, чтобы функция принимала и бесконечные значения, то всегда подчеркнём это обстоятельство. Арифметические действия над символами $+\infty$, $-\infty$ мы определяем обыкновенным образом.

В частности, мы полагаем $(+\infty) \,.\, 0 = (-\infty) \,.\, 0 = 0$. Если f — функция в интервале $\langle a, b\rangle$, то R_f [соотв. K_f] означает множество всех точек интервала (a, b), в которых функция f возрастает [соотв. убывает]. Характеристическую функцию множества R_f [соотв. K_f] в интервале $\langle a, b\rangle$ обозначим символом ϱ_f [соотв. $\varkappa_f$]. Пусть, далее, $\eta_f = \varrho_f - \varkappa_f$. Пусть p_f [соотв. n_f, v_f] — положительное [соотв. отрицательное, полное] изменение функции f. В том случае, когда функция f имеет ограниченное изменение на интервале $\langle a, b\rangle$, означают символы p_f, n_f, v_f также соответствующие меры.

2. *Пусть f — непрерывная функция в E_1 и пусть $r, s \in E_1$, $r < s$. Обозначим символом $\Psi_{rs}(x)$ минимум функции $f(t)$ в интервале $x + r \leqq t \leqq x + s$. Тогда $\Psi_{rs}(x)$ является непрерывной функцией переменного x в E_1.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, $x \in E_1$. Если h достаточно мало, то для всех $t \in \langle x + r, x + s\rangle$ выполняется неравенство $|f(t + h) - f(t)| \leqq \varepsilon$. Обозначая μ [соотв. ν] минимум функции $f(t)$ [соотв. $f(t + h)$] в интервале $x + r \leqq t \leqq x + s$, получаем отсюда $|\mu - \nu| \leqq \varepsilon$. Так как $\mu = \Psi_{rs}(x)$ и ν равняется минимуму функции $f(\tau)$ для $x + h + r \leqq \tau \leqq x + h + s$, то $\nu = \Psi_{rs}(x + h)$ и $|\Psi_{rs}(x) - \Psi_{rs}(x + h)| \leqq \varepsilon$.

3. *Пусть f — непрерывная функция в интервале $\langle a, b\rangle$. Тогда R_f, K_f*[1]) *являются множествами $G_{\delta\sigma}$.*

Доказательство. Распространим f на E_1, полагая $f(x) = f(a)$ для $x < a$ и $f(x) = f(b)$ для $x > b$. Пусть R^+ [соотв. R^-] — множество всех $x \in E_1$, в которых f возрастает справа [соотв. слева]. Построим для $r < s$ функцию Ψ_{rs} как в § 2 и положим для $k \in E_1$

$$R_{rs}^k = E[x; f(x) + k < \Psi_{rs}(x)] . \tag{1}$$

Пусть, далее, $\mathbf{R}$ — множество всех положительных рациональных чисел. Нетрудно обнаружить, что имеет место соотношение

$$R^+ = \bigcup_s \Big(\bigcap_{r<s} \big(\bigcup_k R_{rs}^k \big) \Big) , \quad \text{где} \quad k, r, s \in \mathbf{R} . \tag{2}$$

Так как функция Ψ_{rs} непрерывна, то множества R_{rs}^k открыты и R^+ является множеством $G_{\delta\sigma}$. Подобным образом можно показать, что R^- является тоже множеством $G_{\delta\sigma}$. Отсюда непосредственно вытекает наше утверждение для множества $R_f = R^+ \cap R^-$. Взяв $-f$ вместо f получим, что это утверждение справедливо и для множества K_f.

4. *Пусть f — непрерывная функция с ограниченным изменением на интервале $\langle a, b\rangle$. Напишем R, v вместо R_f, v_f и т. п. Тогда имеет место равенство*

$$p(\langle a, b\rangle - R) = n(\langle a, b\rangle - K) = v(\langle a, b\rangle - (R \cup K)) = 0 . \tag{3}$$

Доказательство. Как мы показали в § 3, множество $\langle a, b\rangle - R$ является борелевским. Пусть F — характеристическая функция этого множества в интервале $\langle a, b\rangle$. Используя теорему из статьи [1] (см. формулу (1) на стр. 93), получаем

$$p(\langle a, b\rangle - R) = \int_a^b F(x)\, \mathrm{d}p(x) = \int_{E_1} \Big(\sum_{f(x)=y} F(x)\, \varrho(x) \Big)\, \mathrm{d}y . \tag{4}$$

Так как $F(x)\, \varrho(x) = 0$ для $a \leqq x \leqq b$, то из равенства (4) вытекает $p(\langle a, b\rangle - R) = 0$. Взяв $-f$ вместо f получим $n(\langle a, b\rangle - K) = 0$. Наконец, $0 \leqq v(\langle a, b\rangle - (R \cup K)) \leqq p(\langle a, b\rangle - R) + n(\langle a, b\rangle - K) = 0$.

5. Сохраним предположения из § 4.

Пусть F — функция на интервале $\langle a, b\rangle$, которая может принимать и бесконечные значения. Тогда соотношения

$$\int_a^b F(x)\, \varrho(x)\, \mathrm{d}v(x) = \int_a^b F(x)\, \mathrm{d}p(x) , \tag{5$_1$}$$

---

[1]) Определение множеств R_f, K_f см. в § 1; в том же параграфе определены символы p_f, v_f и т. п.

$$\int_a^b F(x)\,\varkappa(x)\,\mathrm{d}v(x) = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}n(x)\,, \tag{5_2}$$

$$\int_a^b F(x)\,\eta(x)\,\mathrm{d}v(x) = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}f(x) \tag{5_3}$$

справедливы в следующем смысле: Если существует (конечный или бесконечный) интеграл Стильтьеса-Лебега в одной части равенства, то существуют и равны между собой оба интеграла, встречающиеся в данном соотношении.

Доказательство. Из § 4 вытекает $p(\langle a, b\rangle - R) = n(R) = 0$. Отсюда получаем

$$\int_a^b F\,\mathrm{d}p = \int_R F\,\mathrm{d}p + \int_R F\,\mathrm{d}n = \int_R F\,\mathrm{d}v = \int_a^b F\varrho\,\mathrm{d}v\,,$$

как только существует один из интегралов, выступающих в равенстве (5_1). Подобным образом доказывается соотношение (5_2). Вычитая (5_2) из (5_1) получаем (5_3).

Замечание. Если понимать производные в смысле теории меры (см. [2], § 32, стр. 132), то из (5_1), (5_2) вытекает

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}v} = \varrho\,, \quad \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}v} = \varkappa\,. \tag{6}$$

6. Условимся ещё в следующих обозначениях: *Если φ — функция в интервале $\langle a, b\rangle$ и $y \in E_1$, то $N_\varphi(y)$ равняется числу точек множества $\varphi^{-1}(y)$ (если это множество бесконечно, то полагаем $N_\varphi(y) = +\infty$). В дальнейшем f будет всегда означать непрерывную функцию в интервале $\langle a, b\rangle$, g — непрерывную функцию в интервале $\langle \alpha, \beta\rangle = f(\langle a, b\rangle)$. Будем писать $\tilde{v}$, $\tilde{N}$, $\tilde{\eta}$ вместо $v_{g(f)}$, $N_{g(f)}$, $\eta_{g(f)}$.*

7. a) *Если полное изменение функции g на интервале $\langle \alpha, \beta\rangle$ бесконечно, то бесконечно тоже полное изменение сложной функции $g(f)$ на интервале $\langle a, b\rangle$.*

b) *Если g — функция с ограниченным изменением на интервале $\langle \alpha, \beta\rangle$, то имеет место равенство*

$$\tilde{v}(\langle a, b\rangle) = \int_\alpha^\beta N_f(y)\,\mathrm{d}v_g(y)\,. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $y \in E_1$. Тогда число точек множества $(g(f))^{-1}(y) = f^{-1}(g^{-1}(y))$ не меньше чем число точек множества $g^{-1}(y)$. Другими словами, $\tilde{N}(y) \geqq N_g(y)$. Интегрируя это неравенство в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, получаем в силу известной теоремы С. Банаха (см. [3], теорема (6.4), стр. 280)

$$\tilde{v}(\langle a, b\rangle) \geqq v_g(\langle \alpha, \beta\rangle)\,. \tag{8}$$

Отсюда непосредственно вытекает утверждение a). Предположим теперь, что функция g имеет ограниченное изменение на интервале $\langle\alpha, \beta\rangle$ и приступим к доказательству утверждения b). Разделим интервал $\langle a, b\rangle$ на 2^n равных частей, вставив между a и b точки деления $x_k = a + k\dfrac{b-a}{2^n}$ $(0 \leqq k \leqq 2^n, n$ — натуральное). Обозначим символом L_k^n характеристическую функцию множества $f(\langle x_{k-1}^n, x_k^n\rangle) = \langle y_{k-1}^n, y_k^n\rangle$ и положим $N^n = \sum_{k=1}^{2^n} L_k^n$. Тогда $N^n(y)$ $(y \in E_1)$ равняется числу тех интервалов $\langle x_{k-1}^n, x_k^n\rangle$, которые содержат хоть одну точку множества $f^{-1}(y)$. Положим ещё $D_n = \{x_0^n, x_1^n, \ldots, x_{2^n}^n\}$, $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Множество $f(D)$ счётно, и нетрудно обнаружить, что для $y \in E_1 - f(D)$ выполняется соотношение $N^n(y) \nearrow N_f(y)$ $(n \to \infty)$.[2]) Отсюда видно, что N_f измерима в смысле Бореля и что имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta N^n(y)\,\mathrm{d}v_g(y) = \int_\alpha^\beta N_f(y)\,\mathrm{d}v_g(y)\,. \tag{9}$$

Подставляя в соотношение (8) $\langle x_{k-1}^n, x_k^n\rangle$ вместо $\langle a, b\rangle$ и $\langle y_{k-1}^n, y_k^n\rangle$ вместо $\langle\alpha, \beta\rangle$, получаем неравенства $\tilde{v}(\langle x_{k-1}^n, x_k^n\rangle) \geqq v_g(\langle y_{k-1}^n, y_k^n\rangle)(1 \leqq k \leqq 2^n)$. Отсюда вытекает

$$\tilde{v}(\langle a, b\rangle) \geqq \sum_{k=1}^{2^n} v_g(\langle y_{k-1}^n, y_k^n\rangle) = \sum_{k=1}^{2^n} \int_\alpha^\beta L_k^n(y)\,\mathrm{d}v_g(y) = \int_\alpha^\beta N^n(y)\,\mathrm{d}v_g(y)\,.$$

Используя (9), имеем

$$\tilde{v}(\langle a, b\rangle) \geqq \int_\alpha^\beta N_f(y)\,\mathrm{d}v_g(y)\,. \tag{10}$$

Положим теперь $S_n = \sum_{k=1}^{2^n} |g(f(x_{k-1}^n)) - g(f(x_k^n))|$. Так как функция $g(f)$ непрерывна в $\langle a, b\rangle$, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \tilde{v}(\langle a, b\rangle)\,. \tag{11}$$

Далее, $|g(f(x_{k-1}^n)) - g(f(x_k^n))| \leqq v_g(\langle y_{k-1}^n, y_k^n\rangle) = \int_\alpha^\beta L_k^n(y)\,\mathrm{d}v_g(y)$ для $k = 1, \ldots, 2^n$, так что

$$S_n \leqq \sum_{k=1}^{2^n} \int_\alpha^\beta L_k^n(y)\,\mathrm{d}v_g(y) = \int_\alpha^\beta N^n(y)\,\mathrm{d}v_g(y)\,.$$

Это неравенство вместе с (11) и (9) даёт

$$\tilde{v}(\langle a, b\rangle) \leqq \int_\alpha^\beta N_f(y)\,\mathrm{d}v_g(y)\,. \tag{12}$$

Из (12) и (10) вытекает (7).

---

[2]) Этим разумеется, что $N^1(y) \leqq N^2(y) \leqq \ldots \leqq N^n(y) \leqq N^{n+1}(y) \leqq \ldots$ и $\lim_{n\to\infty} N^n(y) = N_f(y)$. Сравни [3], доказательство т. (6.4), стр. 280.

8. *Пусть F — функция в интервале $\langle a, b\rangle$, которая может принимать и бесконечные значения.*

Тогда имеет место равенство

$$\int_{\alpha}^{\beta}\Big(\sum_{f(x)=y} F(x)\Big)\,\mathrm{d}v_g(y) = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}\tilde{v}(x) \tag{13}$$

в предположении, что существует интеграл в правой части этого равенства.[3])

Доказательство. Эту теорему можно вывести из утверждения b) в § 7 методом, которым воспользовался Ян Маржик в статье [1] при доказательстве подобной формулы (1) на стр. 93. Поэтому лишь наметим главную идею доказательства, отсылая читателя в подробностях к упомянутой статье [1].

Предположим, что функция $g(f)$ имеет ограниченное изменение на интервале $\langle a, b\rangle$. Тогда из § 7 вытекает, что функция g имеет ограниченное изменение на интервале $\langle\alpha, \beta\rangle$ и что множество $f^{-1}(y)$ конечно для v_g-почти всех $y \in \langle\alpha, \beta\rangle$ (значит, если F — конечная функция, то сумма $\sum_{f(x)=y} F(x)$ имеет смысл v_g-почти всюду). При помощи утверждения b) из § 7 (которое мы применим к интервалам, содержащимся в $\langle a, b\rangle$) легко проверить, что соотношение (13) удовлетворяется, если F — характеристическая функция какого-нибудь интервала $I \subset \langle a, b\rangle$. Образуя линейные комбинации и предельные переходы (используя совместно соотношение (7) и теорему о приближении интегрируемой функции при помощи функций второго класса Бера), мы обнаружим постепенно, что равенство (13) выполняется, если F — 1. ступенчатая функция (то есть линейная комбинация характеристических функций интервалов, содержащихся в $\langle a, b\rangle$), 2. непрерывная функция, 3. ограниченная функция второго класса Бера, 4. ограниченная $\tilde{v}$-измеримая функция, 5. неотрицательная $\tilde{v}$-измеримая функция, 6. такая функция, что интеграл в правой части равенства (13) существует.

9. *Пусть F — функция в интервале $\langle a, b\rangle$, которая может принимать и бесконечные значения. Тогда имеет место равенство*

$$\int_{\alpha}^{\beta}\Big(\sum_{f(x)=y} F(x)\,\eta_f(x)\Big)\mathrm{d}g(y) = \int_a^b F(x)\mathrm{d}g(f(x)) \tag{14}$$

в предположении, что существует интеграл в правой части этого равенства.[3])

---

[3]) Это надо понимать следующим образом: Если существует (конечный или бесконечный) интеграл Стильтьеса-Лебега в правой части (в этом требовании заключается, в частности, предположение, что функция $g(f)$ имеет ограниченное изменение на интервале $\langle a, b\rangle$, так что множество $f^{-1}(y)$ конечно для v_g-почти всех $y \in \langle\alpha, \beta\rangle$), то сумма под знаком интеграла в левой части имеет смысл для v_g-почти всех $y \in \langle\alpha, \beta\rangle$, существует интеграл в левой части и равен интегралу в правой части.

Доказательство. Предположим, что существует интеграл в правой части равенства (14). Используя формулу (5_3) (где напишем $g(f)$ вместо f) и утверждение из § 8, имеем

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}g(f(x)) = \int_a^b F(x)\,\tilde{\eta}(x)\,\mathrm{d}\tilde{v}(x) = \int_\alpha^\beta \Big(\sum_{f(x)=y} F(x)\,\tilde{\eta}(x)\Big)\,\mathrm{d}v_g(y)\,. \tag{15}$$

Положим $L = E[y;\, y \in \langle\alpha, \beta\rangle,\, N_f(y) = +\infty]$. Так как функция $g(f)$ имеет ограниченное изменение на интервале $\langle a, b\rangle$, то из (7) вытекает $v_g(L) = 0$. Пусть, далее, A—множество всех точек из (a, b), в которых функция f имеет экстремум. Множество $f(A)$ счётно, так что множество $M = L \cup f(A) \cup \{f(a), f(b)\}$ имеет опять v_g-меру равную нулю. Очевидно, справедлива импликация

$$(x \in \langle a, b\rangle,\ f(x) \text{ non} \in M) \Rightarrow \eta_f(x) \neq 0\,. \tag{16}$$

Положим, наконец, $P = (R_g \cup K_g) - M$.[1]) Используя утверждение из § 4 (где напишем g вместо f, $\langle\alpha, \beta\rangle$ вместо $\langle a, b\rangle$), имеем $v_g(\langle\alpha, \beta\rangle - P) = 0$. Если $x \in \langle a, b\rangle$, $f(x) = y \in P$, то $\eta_f(x) \neq 0$ (см. (16)), $\eta_g(y) \neq 0$ и имеет место равенство $\eta_f(x) \cdot \eta_g(y) = \tilde{\eta}(x)$, как легко видеть. По теореме из § 5 имеем

$$\int_\alpha^\beta \Big(\sum_{f(x)=y} F(x)\,\tilde{\eta}(x)\Big)\,\mathrm{d}v_g(y) = \int_P \Big(\sum_{f(x)=y} F(x)\,\eta_f(x)\,\eta_g(y)\Big)\,\mathrm{d}v_g(y) =$$

$$= \int_\alpha^\beta \Big(\sum_{f(x)=y} F(x)\,\eta_f(x)\Big)\,\eta_g(y)\,\mathrm{d}v_g(y) = \int_\alpha^\beta \Big(\sum_{f(x)=y} F(x)\,\eta_f(x)\Big)\,\mathrm{d}g(y)\,.$$

Отсюда и из (15) вытекает (14).

Замечание. Полагая в формуле (14) $g(y) = y$ для $\alpha \leqq y \leqq \beta$, получаем (напишем $\eta = \eta_f$)

$$\int_\alpha^\beta \Big(\sum_{f(x)=y} F(x)\,\eta(x)\Big)\,\mathrm{d}y = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}f(x)\,. \tag{17}$$

Это формула (3) из статьи [1], стр. 93. Как надо понимать равенство (17), объяснено в подстрочном замечании[3]); разумеется, теперь $g(f) = f$ и v_g—обыкновенная лебеговская мера.

Предположим теперь, что функция f имеет ограниченное изменение на интервале $\langle a, b\rangle$. Пусть D—множество всех точек из (a, b), в которых не существует производная функции f (конечная ни бесконечная). Из известных теорем теории функций действительного переменного [см., напр., [3], гл. IX, § 6, теоремы (6.2) и (6.4)] вытекает, что множество $f(D)$ имеет меру нуль. Положим ещё $D_0 = E[x;\, x \in (a, b),\ f'(x) = 0]$. Покажем, что множество $f(D_0)$ имеет тоже меру нуль. Итак, пусть ε—произвольное положительное число. Поставим в соответствие каждому $x \in D_0$ положительное число h_x $(0 < h_x < b - x)$ так, чтобы выполнялась импликация

$$x < y \leqq x + h_x \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leqq \varepsilon(y - x)\,. \tag{18}$$

Тогда система всех интервалов вида

$$\langle f(x) - \varepsilon(y - x), f(x) + \varepsilon(y - x)\rangle \; (x \in D_0, x < y \leqq x + h_x)$$

покрывает, очевидно, множество $f(D_0)$ в смысле Витали. Значит, из этой системы можно извлечь счётную (или конечную) подсистему непересекающихся интервалов $I_1, I_2, \ldots$, покрывающую $f(D_0)$ с точностью до множества меры нуль. Если положить

$I_n = \langle f(x_n) - \varepsilon(y_n - x_n), f(x_n) + \varepsilon(y_n - x_n)\rangle$, то из (18) видно, что

$f(\langle x_n, y_n\rangle) \subset I_n$. Итак, система интервалов $\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle, \ldots$ является тоже системой без пересечений, и внешняя мера множества $f(D_0)$ не больше чем $2\varepsilon(b - a)$.

Для $x \in (a, b) - (D \cup D_0)$ имеем $\eta(x) = \operatorname{sgn} f'(x)$ [4].) Так как множество $f(D \cup D_0)$ имеет меру нуль, то отсюда видно, что в формуле (17) можно заменить функцию $\eta(x)$ функцией $\operatorname{sgn} f'(x)$.

10. *Пусть Φ — функция в интервале $\langle\alpha, \beta\rangle$, которая может принимать и бесконечные значения. Тогда соотношение*

$$\int_{f(a)}^{f(b)} \Phi(y)\, \mathrm{d}g(y) = \int_a^b \Phi(f(x))\, \mathrm{d}g(f(x)) \tag{19}$$

справедливо в следующем смысле: Если существует интеграл в правой части, то существует тоже интеграл в левой части и имеет место равенство.

Доказательство. Применяя формулу (14) к функции $F(x) = \Phi(f(x))$, получаем

$$\int_a^b \Phi(f(x))\, \mathrm{d}g(f(x)) = \int_\alpha^\beta \Big(\sum_{f(x)=y} \Phi(f(x))\, \eta_f(x)\Big)\, \mathrm{d}g(y) = \int_\alpha^\beta \Big(\sum_{f(x)=y} \eta_f(x)\Big)\, \Phi(y)\, \mathrm{d}g(y)\,. \tag{20}$$

Построим теперь множество M как в доказательстве из § 9; имеем

$v_g(M) = 0$. Если $y \in \langle\alpha, \beta\rangle - M$, то множество $f^{-1}(y)$ конечно и $\eta_f(x) \neq 0$ для всех $x \in f^{-1}(y)$. Далее нетрудно обнаружить, что

$$\sum_{f(x)=y} \eta_f(x) = \tfrac{1}{2}(\operatorname{sgn}(f(b) - y) - \operatorname{sgn}(f(a) - y))$$

(см. [1], формула (8), стр. 94). Отсюда вытекает

$$\int_\alpha^\beta \Big(\sum_{f(x)=y} \eta_f(x)\Big)\, \Phi(y)\, \mathrm{d}g(y) = \int_{f(a)}^{f(b)} \Phi(y)\, \mathrm{d}g(y)\,,$$

что вместе с (20) даёт (19).

---

[4]) Мы пишем $\operatorname{sgn}(+\infty) = 1$, $\operatorname{sgn}(-\infty) = -1$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ян Маржик* (Jan Mařík): Преобразование одномерных интегралов, Čas. pro pěst. mat., *82* (1957), 93—98.

[2] *П. Халмош*: Теория меры, Москва 1953 (перевод с английского: P. Halmos, Measure Theory).

[3] *S. Saks:* Theory of the integral, New York, 1936.

Zusammenfassung

TRANSFORMATION DES LEBESGUE-STIELTJESSCHEN INTEGRALS

JOSEF KRÁL und JIŘÍ MAREK, Praha

(Eingelangt am 27. IV. 1957)

Aus den Behauptungen, welche in vorlegender Behandlung beweist sind, folgt insbesonders der Satz:

Sei $f(x)$ eine auf einem Segment $\langle a, b\rangle$ definierte stetige Funktion und sei $g(x)$ stetige Funktion auf dem Segment $\langle \alpha, \beta\rangle = f(\langle a, b\rangle)$, wobei beide Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ endlich sind.

Und sei $\Phi(y)$ eine auf dem Segment $\langle \alpha, \beta\rangle$ gegebene Funktion, die auch unendlich sein kann. Nehmen wir an, dass Lebesgue-Stieltjessches Integral

$$\int_a^b \Phi(f(x))\, \mathrm{d}g(f(x))$$

existiert.

Dann existiert auch Lebesgue-Stieltjessches Integral $\int_{f(a)}^{f(b)} \Phi(y)\, \mathrm{d}g(y)$ und gilt die Gleichung

$$\int_{f(a)}^{f(b)} \Phi(y)\, \mathrm{d}g(y) = \int_a^b \Phi(f(x))\, \mathrm{d}g(f(x))\,.$$