Czechoslovak Mathematical Journal

Marko Švec

Несколько замечаний о линейном дифференциальном уравнении третьего порядка

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 15 (1965), No. 1, 42–49

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100652

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1965

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

Чехословацкий математический журнал, т. 15 (90) 1965, Прага

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ О ЛИНЕЙНОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

МАРКО ШВЕЦ (Marko Švec), Братислава

(Поступило в редакцию 14/X 1963 г.)

В работе мы занимаемся линейным дифференциальным уравнением третьего порядка, имеющим свойство (V_1) или (V_2). Доказывается, что это свойство влечет за собой много дальнейших свойств, касающихся числа нулей решения, и, главное, существование решения без нулей.

Пусть L_3 – линейный дифференциальный оператор третьего порядка с непрерывными коэффициентами в интервале (a, ∞), $-\infty \leqq a$ и пусть коэффициент при наивысшей производной равен 1. Мы будем исследовать уравнение

$$L_3 y = 0 . \tag{1}$$

Его решение мы будем называть *колебательным,* если оно имеет весконечное число нулей, имеющих предельную точку в бесконечности. Уравнение (1) мы будем называть *колебательным,* если существует хоть оуно решение, являющееся колебательным, и мы будем называть его *неколебательным,* если оно не имеет колебательных решений.

Мы будем говорить, что *уравнение* (1) *имеет свойство* (V_1), *если каждое его решение, имеющее двойной нуль, напр., в* x_0, *не имеет нулей для* $x < x_0$.

Мы будем говорить, что *уравнение* (1) *имеет свойство* (V_2), *если каждое его решение, имеющее двойной нуль, напр., в* x_0, *не имеет нулей для* $x > x_0$.

Пусть

$$\bar{L}_3 z = 0 \tag{2}$$

есть уравнение, сопряженное для уравнения (1).

В дальнейшем мы будем пользоваться известным соотношением между решениями сопряженных уравнений. Если y_1, y_2, y_3 – фундаментальная система решений уравнения (1) и $W(y_1, y_2, y_3)$ – ее определитель Вронского ,и если u, v суть два произвольных решения уравнения (1), то функция $W(u, v)/W(y_1, y_2, y_3)$ является решением уравнения (2). Из известной формулы Лиувилля следует,

что вронскиан фундаментальной системы решений является отличной от нуля функцией на интервале (a, ∞) и что вронскианы двух фундаментальных систем решений отличаются лишь постоянным фактором. Так как в дальнейшем этот постоянный фактор не будет иметь значения, мы будем в качестве вронскиана фундаментальной системы брать всегда одну и ту же функцию и обозначать ее через W.

Свойства V_1 и V_2 связаны с уравнениями (1) и (2) следующим образом ([1], Лемма 2.6, стр. 924):

Лемма 1. *Уравнение* (1) *имеет свойство* (V_1) $[(V_2)]$ *тогда и только тогда, когда уравнение* (2) *имеет свойство* (V_2) $[(V_1)]$.

Из этой леммы мы получим следующее утверждение:

Теорема 1. *Уравнение* (1) *имеет свойство* (V_1) *и* (V_2) *тогда и только тогда, когда каждое решение уравнения* (1) *имеет самое больше два простых нуля* (*или один двукратный*).

Доказательство. Пусть уравнение (1) имеет свойство (V_1) и (V_2). По лемме 1 свойствами (V_1) и (V_2) обладает и уравнение (2). Отсюда следует, что каждое решение уравнения (1), а также (2), имеющее двукратный нуль, не имеет уже других нулей. Покажем, что ни одно решение уравнения (1) не может обладать тремя простыми нулями. Пусть, напр., решение $y(x)$ уравнения (1) имеет три простых нуля: $x_1 < x_2 < x_3$. Пусть $u(x)$ – решение уравнения (1), имеющее в x_1 двукратный нуль (а значит, никаких других нулей уже не имеет). Ясно, что $W(y, u)$ имеет в x_1 двукратный нуль и, следовательно, $W(y, u)/W$, являющееся решением уравнения (2), уже не имеет других нулей. Итак, $W(y, u) \neq 0$ для $x \in \langle x_2, x_3 \rangle$. Но отсюда следует, что $u(x)$ должно иметь нуль в интервале $\langle x_2, x_3 \rangle$, а это противоречит допущению. Таким образом, мы доказали, что $y(x)$ не может иметь трех нулей.

С другой стороны, из определения свойств (V_1) и (V_2) следует утверждение: *Если каждое решение уравнения* (1) *имеет самое больше два нуля* (*или один двукратный*), *то уравнение* (1) *обладает свойствами* (V_1) *и* (V_2).

Замечание 1. Теорема 1 эквивалентна теореме Маммана [2] о разложении линейного дифференциального операгора порядка n $(n = 3)$ в произведение n действительных линейных дифференциальных операторов 1-го порядка.

Замечание 2. Если уравнение имеет свойство (V_2), то каждое его решение, имеющее двукратный нуль, будет неколебательным.

Лемма 2. *Пусть уравнение* (1) *имеет свойство* (V_1). *Тогда решения, имеющие нуль, имеют одинаковый колебательный характер, т. е. или все они колебательные или все они неколебательны.*

Это утверждение доказывается в [1], теорема 3.4, стр. 927.

Лемма 3. *Пусть уравнение* (1) *имеет свойство* (V_1) *и пусть* $u(x)$ — *его решение, имеющее в числе* x_0 *двукратный нуль. Если* x_1 — *нуль решения* $u(x)$ *и притом первый, следующий за* x_0, *то каждое решение уравнения* (1), *имеющее в* x_0 *нуль, имеет нуль также в интервале* $(x_0, x_1\rangle$.

Доказательство. Пусть $y(x)$ — решение уравнения (1) и пусть $y(x_0) = 0$. Если и $y'(x_0) = 0$, то $y(x) = c\,u(x)$, где c — подходящая постоянная. Тогда утверждение, очевидно, справедливо. Итак, пусть $y'(x_0) \neq 0$. Тогда $W(u, y) = u'(x)\,y(x) - u(x)\,y'(x)$ — функция, имеющая в x_0 двукратный нуль и не равная тождественно нулю на (a, ∞). Так как $W(u, y)/W$ есть решение уравнения (2), имеющего свойство (V_2), это значит, что $W(u, y) \neq 0$ для $x > x_0$. Без ограничения общности можно допустить, что $u(x) > 0$ для $x \in (x_0, x_1)$ и, следовательно, $u'(x_1) < 0$, и что $y'(x_0) > 0$. Если $y(x)$ не имеет на $(x_0, x_1\rangle$ нуля, то $y(x) > 0$ для $x \in (x_0, x_1\rangle$. Но тогда $u(x)/y(x) > 0$ для $x \in (x_0, x_1)$,

$$\lim_{x \to x_0+} \frac{u(x)}{y(x)} = \frac{u'(x_0)}{y'(x_0)} = 0, \quad W(u, y)\big|_{x_1} = u'(x_1)\,y(x_1) < 0$$

и, следовательно, $W(u, y) < 0$ для $x > x_0$. Отсюда следует, что

$$\left(\frac{u(x)}{y(x)}\right)' = \frac{W(u, y)}{y^2(x)} < 0 \quad \text{для} \quad x \in (x_0, x_1)$$

и, следовательно, $u(x)/y(x)$ является на интервале (x_0, x_1) убывающей функцией. Это приводит к противоречию, ибо $\lim\limits_{x \to x_0+} u(x)/y(x) = 0$ и $u(x)/y(x) > 0$. Это противоречие доказывает, что $y(x)$ не может быть отличным от нуля для $(x_0, x_1\rangle$.

Теорема 2. *Пусть уравнение* (1) *имеет свойство* (V_1). *Тогда*: а) *Необходимым и достаточным условием для того, чтобы уравнение* (1) *было неколебательным, является условие, чтобы существовало его решение, имеющее лишь один нуль, причем этот нуль двукратный.*

б) *Необходимым и достаточным условием для того, чтобы уравнение* (1) *было неколебательным, является существование числа* $\gamma \in (a, \infty)$ *такого, что на интервале* $\langle\gamma, \infty)$ *каждое решение уравнения* (1) *имеет не более двух нулей* (*или один двукратный*).

Доказательство. а) Из леммы 2 следует, что условие достаточно. Докажем его необходимость. Пусть уравнение (1) неколебательно. Пусть $u(x)$ — его решение и пусть x_n — его последний нуль. Тогда $u(x) \neq 0$ для $x > x_n$. Если x_n — двукратный нуль решения $u(x)$, то $u(x)$ есть решение требуемого свойства. Допустим поэтому, что x_n — простой нуль $u(x)$. Пусть $y(x)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее условию $y(x_n) = y'(x_n) = 0$. Допустим далее, что это решение имеет за точкой x_n нуль, который мы обозначим через ξ. Но тогда по лемме 3 $u(x)$ должно иметь нуль в интервале $(x_n, \xi\rangle$, что противоречит допущению, что x_n является последним нулем $u(x)$. Это противоречие доказы-

вает, что $y(x) \neq 0$ для $x > x_n$. Из свойства (V_1) следует, однако, что $y(x) \neq 0$ и для $x < x_n$. Итак, $y(x)$ есть решение требуемого свойства.

б) Ясно, что указанное условие достаточно. Докажем его необходимость. Пусть уравнение (1) неколебательно и пусть $u(x)$ имеет тот же самый смысл, как и в части а). Пусть $u(x) > 0$ для $x > x_n$. Пусть $v(x)$ — решение уравнения (1), имеющее на интервале $\langle x_n, \infty)$ по крайней мере три нуля. Обозначим их через t_1, t_2, t_3, и пусть это первые три нуля. Итак, $x_n \leqq t_1 \leqq t_2 \leqq t_3$. Из леммы 3 следует, что не может быть $x_n = t_1 = t_2 < t_3$. Из свойства (V_1), однако, следует снова, что не может быть $t_1 < t_2 = t_3$, а из теоремы о существовании следует, что не может быть $t_1 = t_2 = t_3$ (тогда было бы $v(x)$ равным тождественно нулю, что мы исключаем). Итак, может наступить только случай $x_n \leqq t_1 \leqq t_2 < < t_3$ (если $x_n = t_1$, то $t_1 < t_2$). Без ограничения общности можно допустить, что $v(x) > 0$ для $x \in (t_2, t_3)$. Но тогда будет и $v(x) > 0$ для $x \in \langle x_n, t_1)$, если $x_n < t_1$. Из сделанных предположений тогда следует, что существует число τ из интервала (t_2, t_3), в котором $W(u, v)$ равно нулю. Действительно, в противном случае решение $u(x)$ имело бы в интервале (t_2, t_3) нуль. Но это значит, что существует постоянная $c > 0$ такая, что $v(x)$ и $c\,u(x)$ касаются друг друга в точке τ, а в интервале $\langle x_n, t_1)$ пересекаются, если $x_n < t_1$. Если же $x_n = t_1$, то они пересекаются в x_n. Но тогда $c\,u(x) - v(x)$, являющееся решением уравнения (1), имеет в числе τ двукратный нуль и в интервале $\langle x_n, t_1)$, или в точке x_n, нуль, что противоречит свойству (V_1).

Замечание 3. Если уравнение (1) неколебательно и имеет свойство (V_1), то по доказанной теореме существует число γ такое, что на интервале (γ, ∞) уравнение (1) имеет свойства (V_1) и (V_2); следовательно, принимая во внимание теорему 1 и замечание 2, на этом интервале можно дифференциальный оператор L_3 представить в виде произведения трех действительных линейных дифференциальных операторов 1-го порядка

Теорема 3. *Пусть уравнение* (1) *имеет свойство* (V_1). *Тогда существует его решение без нулей.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность чисел из интервала (a, ∞) и пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Пусть x_0 — какое-либо число из интервала (a, ∞) и пусть $y_n(x)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$y_n(x_n) = y_n'(x_n) = 0\,, \tag{3}$$

$$y_n^2(x_0) + y_n'^2(x_0) + y_n''^2(x_0) = 1\,. \tag{4}$$

Из свойства (V_1) следует, что $y_n(x) \neq 0$ для $a < x < x_n$. Без ограничения общности можно предположить, что $y_n(x) > 0$ для $x \in (a, x_n)$. Пусть $u_i(x)$, $i = 0, 1, 2$, суть решения уравнения (1), определенные начальными условиями

$$u_i^{(k)}(x_0) = \delta_{ik}\,, \quad i, k = 0, 1, 2\,,$$

где δ_{ik} – символ Кронеккера. Тогда решение $y_n(x)$ можно записать в виде

$$y_n(x) = a_n u_0(x) + b_n u_1(x) + c_n u_2(x),$$

причем, очевидно, $y_n(x_0) = a_n$, $y_n'(x_0) = b_n$, $y_n''(x_0) = c_n$. Итак, условие (4) можно записать в виде

$$a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 = 1. \tag{5}$$

Из этого условия вытекает, что последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ являются ограниченными числовыми последовательностями. Поэтому существуют выделенные из них последовательности, которые сходятся. Пусть это последовательности $\{a_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$, $\{b_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$, $\{c_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$, и пусть $\lim\limits_{i\to\infty} a_{n_i} = a_0$, $\lim\limits_{i\to\infty} b_{n_i} = b_0$, $\lim c_{n_i} = c_0$. Из (5) мы тогда получим

$$a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 = 1. \tag{6}$$

Далее получаем

$$\lim_{i\to\infty} y_{n_i}(x) = \lim_{i\to\infty} [a_{n_i} u_0(x) + b_{n_i} u_1(x) + c_{n_i} u_2(x)] =$$
$$= a_0 u_0(x) + b_0 u_1(x) + c_0 u_2(x) = y(x).$$

Функция $y(x)$ является, очевидно, решением уравнения (1) и условие (6) обеспечивает нетривиальность этого решения. Так как $y_{n_i}(x) > 0$ для $x \in (a, x_{n_i})$, будет $y(x) = \lim\limits_{i\to\infty} y_{n_i}(x) \geqq 0$ для $x \in (a, \infty)$. Но это значит, что $y(x)$ может иметь лишь двукратные нули. Однако, учитывая свойство (V_1), мы убеждаемся, что $y(x)$ не может иметь больше одного нуля, причем двукратного. Если уравнение (1) колебательно, то из теоремы 2 следует, что $y(x)$ вообще не имеет нулей.

Предположим теперь, что уравнение (1) неколебательно. Тогда из теоремы 2 следует существование числа $\gamma \in (a, \infty)$ такого, что на интервале $\langle\gamma, \infty)$ каждое решение уравнения (1) имеет не более двух нулей (или один двукратный). Пусть $t_0 \in (\gamma, \infty)$ и пусть $v(x)$ – решение уравнения (1), выполняющее условия $v(t_0) = v'(t_0) = 0$, $v''(t_0) > 0$. Тогда, очевидно, будет $v(x) > 0$ для $x \in (a, \infty)$, $x \neq t_0$. Это следует из свойства (V_1) и из упомянутого выше свойства решений на интервале (γ, ∞). Возьмем теперь число $t_1 \in (\gamma, \infty)$, $t_1 \neq t_0$ и построим решение $v_1(x)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$v_1(t_1) = v(t_1), \quad v_1'(t_1) = v'(t_1), \quad v_1''(t_1) > v''(t_1). \tag{7}$$

Тогда решение $z_1(x) = v_1(x) - v(x)$ выполняет в числе t_1 условия

$$z_1(t_1) = z_1'(t_1) = 0, \quad z_1''(t_1) = v_1''(t_1) - v''(t_1) > 0.$$

Так как $t_1 \in (\gamma, \infty)$, то из этих же условий следует, что $z_1(x) > 0$ для $x \in (a, \infty)$, $x \neq t_1$. Итак, $z_1(x) = v_1(x) - v(x) > 0$ для $x \in (a, \infty)$, $x \neq t_1$, $z_1(t_1) = v_1(t_1) - v(t_1) = 0$. Отсюда следует, что $v_1(x) > v(x) \geqq 0$ для $x \neq t_1$ и $v_1(t_1) = v(t_1) > 0$. Итак, $v_1(x) > 0$ для $x \in (a, \infty)$.

Теорема 4. *Пусть уравнение* (1) *имеет свойство* (V_1) *и пусть оно колебательно; пусть его решения ограничены. Тогда для решения* $y(x)$ *без нулей, существование которого обеспечивается теоремой* 3 *и которое мы построили в ее доказательстве, имеет место*: $\liminf\limits_{x\to\infty} y(x) = 0$.

Доказательство. Так как $y(x) > 0$ для $x \in (a, \infty)$, ясно, что $\liminf\limits_{x\to\infty} y(x) = m \geqq 0$. Допустим, что $m > 0$. Тогда к числу $\varepsilon = m/2$ можно подобрать такое число $t_\varepsilon \in (a, \infty)$, что для $x \in (t_\varepsilon, \infty)$ будет $y(x) > m - \varepsilon = m/2$.

Ограниченность решений уравнения (1) гарантирует, что последовательность решений $\{y_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ из доказательства теоремы 3 сходится к $y(x)$ равномерно на интервале (a, ∞). Итак, к числу $\varepsilon = m/2$ можно подобрать такой индекс N, что для $n_i > N$ будет $|y_{n_i}(x) - y(x)| < \varepsilon = m/2$. Для достаточно большого n_i будет $x_{n_i} \in (t_\varepsilon, \infty)$. Для этого числа будет одновременно иметь место

$$y(x_{n_i}) > \frac{m}{2} \quad \text{и} \quad |y(x_{n_i}) - y_{n_i}(x_{n_i})| = |y(x_{n_i})| < \frac{m}{2}\,.$$

Но это противоречие, доказывающее, что должно быть $m = 0$.

Теорема 5. *Пусть уравнение* (1) *имеет свойство* (V_1) *и пусть оно неколебательно. Тогда существует тройка линейно независимых его решений, не имеющих нулей.*

Доказательство. Пусть $v(x)$ – решение уравнения (1) и пусть оно имеет тот же смысл, как и в доказательстве теоремы 3. Аналогично, пусть число t_1 и решение $v_1(x)$ означают то же, что и в доказательстве теоремы 3. Решение $v_1(x)$ не имеет нулей. Аналогично тому, как мы построили это решение, построим решение $v_2(x)$, удовлетворяющее условиям

$$v_2(t_1) = v(t_1)\,, \quad v_2'(t_1) = v'(t_1)\,, \quad v_2''(t_1) > v''(t_1)\,, \quad v_2''(t_1) \neq v_2''(t_1)\,. \tag{8}$$

Решение $v_2(x)$ есть также решение без нулей. Подобное же построение применим для решения $v_3(x)$, пользуясь некоторой точкой t_2, $t_2 \in (\gamma, \infty)$, $t_2 \neq t_1$, $t_2 \neq t_0$. Мы потребуем, чтобы оно удовлетворяло условиям

$$v_3(t_2) = v(t_2)\,, \quad v_3'(t_2) = v'(t_2)\,, \quad v_3''(t_2) > v''(t_2)\,.$$

Число t_2 и последнее условие мы подберем так, чтобы

$$v_3(t_1)\, v'(t_1) - v_3'(t_1)\, v(t_1) \neq 0\,. \tag{9}$$

Это всегда возможно. Достаточно построить сначала $v_3(x)$ и потом найти t_1 так, чтобы последнее условие выполнялось. Вычислим определитель Вронского $W(v_1, v_2, v_3)$ в точке t_1. Мы получим

$$W(v_1, v_2, v_3)|_{t_1} = \begin{vmatrix} v(t_1), & v(t_1), & v_3(t_1) \\ v'(t_1), & v'(t_1), & v_3'(t_1) \\ v_1''(t_1), & v_2''(t_1), & v_3''(t_1) \end{vmatrix},$$

где уже подставлены значения производных, которые в числе t_1 принимают функции $v_1(x)$, $v_2(x)$, $v_3(x)$. После вычислений мы получим

$$W(v_1, v_2, v_3)|_{t_1} = (v_2''(t_1) - v_1''(t_1))\,[v_3(t_1)\,v'(t_1) - v_3'(t_1)\,v(t_1)] \neq 0$$

с учетом (8) и (9). Но это значит, что решения $v_1(x)$, $v_2(x)$, $v_3(x)$ линейно независимы. Все они без нулей.

Замечание 4. Теорему 5 можно истолковать и так: Если уравнение (1) имеет свойство (V_1) и имеет лишь одно решение без нулей, то это уравнение колебательно.

Замечание 5. Если уравнение (1) имеет свойство (V_1) и если оно колебательно, то оно может иметь и более одного решения без нулей. Напр., уравнение

$$(1 - e^{-x} + 2e^{-2x})\,u''' - (e^{-x} - 4e^{-2x})\,u'' + (1 + 2e^{-x} + 4e^{-2x})\,u' = 0$$

для $x \in (0, \infty)$ имеет свойство (V_1) и является колебательным: его решения суть, напр., 1, $(1 - e^{-x}) \cos x$, $(1 - e^{-x}) \sin x$, а решения без нулей имеют, напр., вид

$$v_1 = 1, \quad v_2 = 2 + (1 - e^{-x}) \cos x\,, \quad v_3 = 2 + (1 - e^{-x}) \sin x\,.$$

Однако, напр., уравнение $y''' + y = 0$ колебательно и имеет лишь одно решение без нулей, а именно $y = e^{-x}$.

Литература

[1] *M. Hanan:* Oscillation criteria for third-order linear differential equations. Pac. J. Math. *11* (1961), 919–944.

[2] *G. Mammana:* Decomposizione delle espressioni diferenziali lineari omogenee in prodotti di fattori simbolici e applicazione relativa allo studio delle equazioni differenziali lineari. Math. Z. *33* (1931), 186–231.

Summary

SOME REMARKS ON THE LINEAR DIFFERENTIAL EQUATION OF THE THIRD ORDER

MARKO ŠVEC, Bratislava

Let (1) $L_3 y = 0$ be a linear differential equation of the third order, which has continuous coefficients in the interval (a, ∞), $-\infty \leqq a$. Let the leading coefficient be 1. We say that equation (1) has the property (V_1) if each of its solutions with a double zero in any point x_0, has no zero in (a, x_0). We say that (1) has the property

(V_2) if each of its solutions with a double zero in any point x_0, has no zero in (x_0, ∞). In this paper there are studied the effects of these properties on the existence of a solution without zeros. It is proved:

Theorem 1. *Equation* (1) *has properties* (V_1) *and* (V_2) *if and only if each of its solutions has at most two zeros* (*or one zero which is double*).

It follows from Mammana's theorem [2], p. 214, that the properties (V_1) and (V_2) constitute necessary and sufficient conditions for a decomposition of the operator L_3 into the product of three real linear operators of the first order.

Theorem 2. *Let equation* (1) *have property* (V_1). *Then*

a) *A necessary and sufficient condition that the equation* (1) *be non-oscillatory is that there exist a solution which has only one zero and that is double.*

b) *A necessary and sufficient condition that the equation* (1) *be non-oscillatory is that there exist a number* $\gamma \in (a, \infty)$ *such that every solution of* (1) *has at most two zeros* (*or one double zero*) *in the interval* (γ, ∞)).

Theorem 3. *If equation* (1) *has property* (V_1), *then there exists a solution without zeros.*

Theorem 5. *If equation* (1) *has property* (V_1) *and if it is non-oscillatory, then there exist three linearly independent solutions of* (1) *without zeros.*

In case equation (1) has property (V_1) and is oscillatory, there can exist one or more linearly independent solutions of (1) without zeros.