Czechoslovak Mathematical Journal

Grozó Stanilov

Биаксиальная теория конгруэнции прямых

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 15 (1965), No. 1, 64–73

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100654

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1965

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

Чехословацкий математический журнал, т. 15 (90) 1965 Прага

БИАКСИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ КОНГРУЭНЦИИ ПРЯМЫХ

ГРОЗЬО СТАНИЛОВ, София

(Поступило в редакцию 1/XI 1963 г.)

В этой работе методом внешних форм Картана исследуются конгруэнции прямых в биаксиальном пространстве. Луч конгруэнции определяется двумя специальными, так называемыми, параболическими точками луча.

Пусть в трехмерном проективном пространстве P_3 заданны две различные скрешивающиеся прямые j, k, которые будем называть абсолютными. Коллинеации в P_3, которые оставляют эти две прямые неподвижными, образуют семичленную параметрическую группу — это фундаментальная группа биаксиального пространства B_3. В этой работе методом внешних форм Картана исследуем дифференциально-геометрические конгруэнции прямых. В отличие от общей проективной теории конгруэнции прямых, где в качестве определяющих точек луча служат фокусы луча, мы обнаружим две новые параболические точки в биксиальном пространстве, которые полностью определяют этот луч и позволяют одновременное исследование параболических и непараболических конгруэнций. Изпользуя специальное биаксиальное семейство реперов, очень быстро строим канонический репер и находим единственный инвариант b первого порядка. Даем геометрические толкования всех инвариантных величин и, наконец, устанавливаем связь между полуканоническим репером конгруэнции и каноническим репером линейчатой поверхности, принадлежащей данной конгруэнции.

1. ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И УРАВНЕНИЯ СТРУКТУРЫ

В этой работе мы вводим одно специальное семейство реперов $(A_1A_2A_3A_4; E)$: $A_1 \in j$, $A_3 \in k$; единичная точка E находится на прямой, соединяющей точки $A_2 + A_3$, $A_1 + A_4$, где $A_2 + A_3 = (A_2A_3) \times j$, $A_1 + A_4 = (A_1A_4) \times k$. Абсолютные прямые относительно такой координатной системы имеют следующие уравнения

$$j\colon\ x_2 = x_3,\ x_4 = 0\,;$$
$$k\colon\ x_1 = x_4,\ x_2 = 0\,.$$

Произвольная коллинеация, которая сохраняет эти две прямые, имеет следующее представление:

$$
(1) \qquad \begin{aligned}
\varrho x_1' &= (a_4 - a_7)\, x_1 + a_5 x_2 - a_2 x_3 + a_7 x_4 , \\
\varrho x_2' &= - a_1 x_1 + a_3 x_2 + a_1 x_4 , \\
\varrho x_3' &= - a_1 x_1 + a_6 x_2 + (a_3 - a_6)\, x_3 + a_8 x_4 , \\
\varrho x_4' &= \quad a_2 x_2 - a_2 x_3 + a_4 x_4 ,
\end{aligned}
$$

где a_i — параметры. Отсюда как в [1] находим следующие формулы для инфинитезимальных преобразованных координат вершин репера выбранного семейства

$$
(2) \qquad \begin{aligned}
\mathrm{d}A_1 &= (\Theta_4 - \Theta_7)\, A_1 - \Theta_1 A_2 - \Theta_1 A_3 , \\
\mathrm{d}A_2 &= \quad \Theta_5 A_1 + \Theta_3 A_2 + \Theta_6 A_3 + \Theta_2 A_4 , \\
\mathrm{d}A_3 &= - \Theta_2 A_1 + (\Theta_3 - \Theta_6)\, A_3 - \Theta_2 A_4 , \\
\mathrm{d}A_4 &= \quad \Theta_7 A_1 + \Theta_1 A_2 + \Theta_8 A_3 + \Theta_4 A_4 .
\end{aligned}
$$

Выбранное семейство реперов обладает свойством инвариантности в биаксиальном смысле. Можно непосредственно проверить, что каждых два репера нашего семейства связанны коллинеацией вида (1) и наоборот. Если репер нашего семейства преобразуем по формулам (1), получим репер того же семейства. Эти реперы очень удобны для целей линейчатой геометрии, так как точки A_2, A_4 могут быть вполне свободными.

Внешнее дифференцирование равенств (2) приводит к следующим уравнениям структуры биаксиального пространства B_3:

$$
(3) \qquad \begin{aligned}
&\mathrm{D}\Theta_1 = [\Theta_1, \Theta_3 - \Theta_4 + \Theta_7] , \quad \mathrm{D}\Theta_2 = [\Theta_2, \Theta_4 - \Theta_3 + \Theta_6] , \\
&\mathrm{D}\Theta_3 = [\Theta_1, \Theta_5 - \Theta_2] , \qquad\qquad \mathrm{D}\Theta_4 = [\Theta_2, \Theta_8 - \Theta_1] , \\
&\mathrm{D}\Theta_5 = [\Theta_2, \Theta_6 + \Theta_7] + [\Theta_5, \Theta_4 - \Theta_3 - \Theta_7] , \\
&\mathrm{D}\Theta_6 = \mathrm{D}\Theta_7 = [\Theta_1, \Theta_5] + [\Theta_2, \Theta_8] , \\
&\mathrm{D}\Theta_8 = [\Theta_1, \Theta_6 + \Theta_7] + [\Theta_8, \Theta_3 - \Theta_4 - \Theta_6] .
\end{aligned}
$$

Если произведем нормирование

$$
(4) \qquad (A_1 A_2 A_3 A_4) = 1 ,
$$

то путем внешнего дифференцирования получим

$$
(5) \qquad 2(\Theta_3 + \Theta_4) = \Theta_6 + \Theta_7 .
$$

2. КАНОНИЧЕСКИЙ РЕПЕР КОНГРУЭНЦИИ

Присоединяя точки A_2, A_4 к лучу (u, v) данной конгруэнции, можно выделить главные формы Θ_5, Θ_6, Θ_7, Θ_8 конгруэнции. При подвижном луче между ними существуют два линейных соотношения, которые напишем в виде

$$\begin{aligned} \Theta_6 &= a\Theta_5 + b\Theta_8\,, \\ \Theta_7 &= b'\Theta_5 + c\Theta_8\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Внешним дифференцированием получим

$$\begin{aligned} \mathrm{d}a &+ (a + b')(a\Theta_2 + b\Theta_1) + a(\Theta_3 - \Theta_4 + \Theta_7) - \Theta_1 &= x_1\Theta_5 + x_2\Theta_8\,, \\ \mathrm{d}b &+ (b + c)(a\Theta_2 + b\Theta_1) + b(\Theta_4 - \Theta_3 + \Theta_6) - \Theta_2 &= x_2\Theta_5 + x_3\Theta_8\,, \\ \mathrm{d}b' &+ (a + b')(b'\Theta_2 + c\Theta_1) + b'(\Theta_3 - \Theta_4 + \Theta_7) - \Theta_1 &= x_1'\Theta_5 + x_2'\Theta_8\,, \\ \mathrm{d}c &+ (b + c)(b'\Theta_2 + c\Theta_1) + c(\Theta_4 - \Theta_3 + \Theta_6) - \Theta_2 &= x_2'\Theta_5 + x_3'\Theta_8\,. \end{aligned} \tag{7}$$

При вариации только по вторичным параметрам имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \delta a &+ (a + b')(aM_2 + bM_1) + a(M_3 - M_4) - M_1 &= 0\,, \\ \delta b &+ (b + c)(aM_2 + bM_1) + b(M_4 - M_3) - M_2 &= 0\,, \\ \delta b' &+ (a + b')(b'M_2 + cM_1) + b'(M_3 - M_4) - M_1 &= 0\,, \\ \delta c &+ (b + c)(b'M_2 + cM_1) + c(M_4 - M_3) - M_2 &= 0\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Пользуясь уравнениями структуры (3), можно легко подсчитать изменения главных форм

$$\begin{aligned} \delta\Theta_5 &= (\Theta_6 + \Theta_7)\,M_2 + \Theta_5(M_3 - M_4)\,, \\ \delta\Theta_6 &= \delta\Theta_7 = \Theta_5 M_1 + \Theta_8 M_2\,, \\ \delta\Theta_8 &= (\Theta_6 + \Theta_7)\,M_1 + \Theta_8(M_4 - M_3)\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Теперь можно непосредственно проверить, что следующие две квадратические формы

$$r = \Theta_6\Theta_7 - \Theta_5\Theta_8\,, \tag{10}$$

$$p = (\Theta_6 + \Theta_7)^2 - 4\Theta_5\Theta_8 \tag{11}$$

инвариантны, так как $\delta r = 0$, $\delta p = 0$. Кроме того, следующая линейная форма

$$q = \Theta_6 - \Theta_7 \tag{12}$$

является тоже инвариантной. Нулевым многобразием этой формы является специальная линейчатая поверхность конгруэнции, которую мы называем абсолютной.

Если $M = A_2 + tA_4$ – произвольная точка луча конгруэнции, то $\mathrm{d}M$ принадлежит этому лучу, если

$$\Theta_5 + t\Theta_7 = 0\,, \quad \Theta_6 + t\Theta_8 = 0\,.$$

Эти равенства определяют развертывающиеся поверхности конгруэнции. Исключая t, получим $r = \Theta_6\Theta_7 - \Theta_5\Theta_8 = 0$. Итак, нулевыми многообразиями формы r являются развертывающиеся поверхности конгруэнции.

Чтобы дать геометрическое толкование равенства $p = 0$, сначала рассмотрим линейчатые поверхности в B_3. Пусть $P = A_2 + \sigma A_4$ принадлежит лучу (A_2A_4) произвольной линейчатой поверхности в биаксиальном пространстве. Касательная плоскасть этой поверхности в точке $P(\sigma)$ определяется тангенциальными координатами

$$\eta = (A_2, A_4, \mathrm{d}P) = \left(A_2, A_4, A_1 + \frac{\Theta_6 + \sigma\Theta_8}{\Theta_5 + \sigma\Theta_7} A_3\right).$$

Она пересекает абсолютные прямые j, k соответственно в точках

$$J = A_1 + \frac{\Theta_6 + \sigma\Theta_8}{\Theta_5 + \sigma\Theta_7}(A_2 + A_3)\,,$$

$$K = A_3 + \frac{\Theta_5 + \sigma\Theta_7}{\Theta_6 + \sigma\Theta_8}(A_1 + A_4)\,.$$

Прямая (JK) пересекает луч (A_2A_4) в точке $P' = A_2 + \sigma A_4$, так что

$$\sigma' = -\frac{\Theta_5 + \sigma\Theta_7}{\Theta_6 + \sigma\Theta_8}\,.$$

Таким образом соответствие $P \to P'$ будет проективностью с двойными элементами, которые определяются уравнением

$$\Theta_8\sigma^2 + (\Theta_6 + \Theta_7)\,\sigma + \Theta_5 = 0\,. \tag{13}$$

Можно высказать следующее предложение. На каждом луче произвольной линейчатой поверхности в биаксиальном пространстве B_3 определены в общем случае 2 или 1 замечательные точки, которые называются узловыми точками луча [2]. Поверхность с одной узловой точкой называется параболической. Для них выполнено $p = (\Theta_6 + \Theta_7)^2 - 4\Theta_5\Theta_8 = 0$. Итак, нулевыми многообразиями формы p являются параболические поверхности конгруэнции. Они, если учесть (6), определяются уравнением

$$(a + b')^2\,\Theta_5^2 + [2(a + b')(b + c) - 4]\,\Theta_5\Theta_8 + (b + c)^2\,\Theta_8^2 = 0\,.$$

Мы рассмотрим конгруэнции, в которых эти две параболические поверхности

не совпадают. Мы относим конгруэнцию к этим двум параболическим поверхностям. Это дает $b + c = 0$ и $a + b' = 0$. Тогда эти параболические поверхности определеяются соответственно уравнениями $\Theta_5 = 0$ и $\Theta_8 = 0$. Их узловые точки будут A_2 и A_4 — параболические точки луча конгруэнции. Таким же образом 4 вершины репера закрепленны: A_2 и A_4 параболические точки луча, $A_3 = k \times (A_2, j)$, $A_1 = j \times (A_4, k)$. Теперь $M_1 = M_2 = 0$ и из (8) получим $\delta(ab) = 0$, что показывает, что ab — инвариант первого порядка луча конгруэнции.

Можно дать геометрическое толкование этого инварианта. Фокусы F_1, F_2 луча (A_2A_4) определяются уравнением

$$at^2 - t - b = 0 .$$

Если $\Delta = (A_2, A_4, F_1, F_2)$, можно показать, что

$$ab = -\frac{\Delta}{(\Delta + 1)^2} . \tag{14}$$

Вернемся к уравнениям (7). Вводя подходящие обозначения, получим следующие формулы построенного полуканонического репера:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}a + a(\Theta_3 - \Theta_4 + \Theta_4) - \Theta_1 &= x_1\Theta_5 + x_2\Theta_8 , \\ \mathrm{d}b + b(\Theta_4 - \Theta_3 + \Theta_6) - \Theta_2 &= x_2\Theta_5 + x_3\Theta_8 , \\ \Theta_1 &= \alpha\Theta_5 + \beta\Theta_8 , \\ \Theta_2 &= \beta\Theta_5 + \gamma\Theta_8 . \end{aligned} \tag{15}$$

Для дальнейшей канонизации репера можно в общем случае положить $a = 1$. Нормирование (4) приводит к каноническому реперу конгруэнции. Основные формулы дифференциальной биаксиальной геометрии можно написать в следующем виде

$$\begin{gathered} \Theta_1 = \alpha\Theta_5 + \beta\Theta_8 , \quad \Theta_2 = \beta\Theta_5 + \gamma\Theta_8 , \quad \Theta_3 = m\Theta_5 + n\Theta_8 , \\ \Theta_4 = -m\Theta_5 - n\Theta_8 , \quad \Theta_6 = -\Theta_7 = \Theta_5 + b\Theta_8 , \\ \left(m = \tfrac{1}{2}(x_1 + \alpha + 1) , \quad n = \tfrac{1}{2}(x_2 + \beta + b)\right) . \end{gathered} \tag{16}$$

Кроме того, имеет место дифференциальная связь

$$\mathrm{d}b + b(\Theta_4 - \Theta_3 + \Theta_6) - \Theta_2 = x_2\Theta_5 + x_3\Theta_8 . \tag{17}$$

Окрестность первого порядка луча конгруэнции определяется только одним инвариантом b; окрестность второго порядка определяется 6 инвариантами $b, \alpha, \beta, \gamma, x_1, x_2$ (или m, n). Между ними кроме (17) существуют и другие соотношения — те, которые вытекают из (3).

После канонизации репера абсолютная линейчатая поверхность конгруэнции определяется уравнением

$$\Theta_5 = -b\Theta_8 , \tag{18}$$

а развертывающиеся поверхности — уравнением

$$\Theta_5^2 + (2b + 1)\Theta_5\Theta_8 + b^2\Theta_8^2 = 0 . \tag{19}$$

3. СОПРЯЖЕННЫЕ ЛИНЕЙЧАТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ КОНГРУЭНЦИИ

Произвольная линейчатая поверхность, принадлежащая данной конгруэнции и проходящяя через рассматриваемый луч, дается уравнением

$$\Theta_5 = f\Theta_8 , \tag{20}$$

где $f = f(u, v)$ — произвольная функция. Узловые точки этой поверхности определяются уравнением

$$\sigma^2 + f = 0 . \tag{21}$$

Теперь можно высказать следующее предложение:

В семействе (20) существует точно одна линейчатая поверхность такая, что ее узловые точки и фокусы образуют гармоническую группу. Эту поверхность мы называем гармонической поверхностью конгруэнции. Она определяется уравнением

$$\Theta_5 = b\Theta_8 . \tag{22}$$

Вводим следующее определение: Две линейчатые поверхности f_1, f_2 из (20) называем сопряженными, если их узловые точки образуют гармоническую группу. Из этого определения сразу находим, что имеет место соотношение

$$f_2 = -f_1 . \tag{23}$$

Это соотношение является инволюцией с двойными элементами, которые будут параболическими поверхностями конгруэнции. Эта инволюция имеет биаксиальной смысл.

Две поверхности пересекаются гармонически [3], когда

$$f_2 = \frac{-(2b + 1)f_1 - 2b^2}{2f_1 + (2b + 1)} . \tag{24}$$

Это соотношение является тоже инволюцией с двойными элементами, которые будут развертывающимися поверхностями конгруэнции.

В семействе (20) имеют место 2 инволюции (23) и (24). Они имеют общую пару и определяются соответственно уравнениями

$$\Theta_5 = -b\Theta_8\,, \quad \Theta_5 = b\Theta_8\,.$$

Первая из них — это абсолютная линейчатая поверхность, а вторая — гармоническая поверхность конгруэнции. Таким образом мы дали геометрическое толкование абсолютной поверхности.

Через каждый луч конгруэнции проходит ряд замечательных поверхностей:

а) две параболические,
б) две развертывающиеся,
в) одна абсолютная,
г) одна гармоническая.

На луче конгруэнции существует 8 замечательных точек:

а) две параболические,
б) два фокуса,
в) две узловые точки абсолютной поверхности,
г) две узловые точки гармонической поверхности.

Можно выделить следующие важные классы конгруэнции в B_3:

1) $b = 0$ или $b = \infty$. Теперь абсолютная, гармоническая и одна из развертывающехся поверхностей совпадают.

2) $b = -\frac{1}{4}$. Теперь имеем параболические конгруэнции, и гармоническая поверхность совпадает со сдвоенным семейством развертывающихся поверхностей.

Имеет место следующая геометрическая характеристика параболических точек:

Узловые точки и параболические точки произвольной линейчатой поверхности (20) образуют гармоническую группу.

4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЛКОВАНИЯ ИНВАРИАНТОВ

Для инварианта b уже дано геометрическое толкование (14), где надо положить $a = 1$. Теперь используем другие инвариантные точки.

Рассмотрим касательную плоскость к параболической поверхности $\Theta_5 = 0$ в точке A_4. Ее тангенциальные координаты будут

$$\eta_4 = (A_2, A_4, \; -bA_1 + A_3)\,.$$

Она пересекает абсолютные прямые j, k соответственно в точках

$$J_1 = -bA_1 + (A_2 + A_3)\,,$$
$$K_1 = b(A_1 + A_4) - A_3\,.$$

Бесконечная прямая, проходящая через dA_4, при $\Theta_8 = 0$ пересекает j, k в

$$J_2 = (1 - m) A_1 - \alpha(A_2 + A_3),$$
$$K_2 = -m(A_1 + A_4) - \alpha A_3 .$$

Тогда

$$\delta_1 = (A_1, A_2 + A_3, J_1, J_2) = \frac{1}{b\alpha}(1 - m), \tag{25}$$

$$\delta_2 = (A_1 + A_4, A_3, K_1, K_2) = -\frac{m}{b\alpha}. \tag{26}$$

Бесконечная прямая проходящая через dA_2, при $\Theta_8 = 0$ пересекает j в

$$J_3 = (\beta - 1) A_1 - m(A_2 + A_3)$$

и

$$\delta_3 = (A_1, A_2 + A_3, J_1, J_3) = \frac{1}{bm}(\beta - 1). \tag{27}$$

Бесконечная прямая, проходящая через dA_2, при $\Theta_5 = 0$ пересекает j в

$$J_4 = \gamma A_1 - n(A_2 + A_3)$$

и

$$\delta_4 = (A_1, A_2 + A_3, J_1, J_4) = \frac{\gamma}{bn}. \tag{28}$$

Бесконечная прямая, проходящая через dA_4, при $\Theta_5 = 0$ дает

$$J_5 = (b - n) A_1 - \beta(A_2 + A_3)$$

и

$$\delta_5 = (A_1, A_2 + A_3, J_1, J_5) = \frac{1}{b\beta}(b - n). \tag{29}$$

Равенства (14), (25), (26), (27), (28), и (29) дают геометрические толкования всех инвариантов b, α, β, γ, m, n (x_1, x_2) при помощи двойных отношений.

5. РЕПЕР ЛИНЕЙЧАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ, ПРИНАДЛЕЖАЩЕЙ ДАННОЙ КОНГРУЭНЦИИ

Сначала строим канонический репер произвольной непараболической линейчатой поверхности в биаксиальном пространстве. Теперь имеем

$$\begin{aligned} dB_1 &= (\psi_4 - \psi_7) B_1 - \psi_1 B_2 - \psi_1 B_3 , \\ dB_2 &= \psi_5 B_1 + \psi_3 B_2 + \psi_6 B_3 + \psi_2 B_4 , \\ dB_3 &= -\psi_2 B_1 + (\psi_3 - \psi_6) B_3 - \psi_2 B_4 , \\ dB_4 &= \psi_7 B_1 + \psi_1 B_2 + \psi_8 B_3 + \psi_4 B_4 . \end{aligned} \tag{30}$$

Выбирая в качестве B_2, B_4 узловые точки луча линейчатой поверхности, сразу реализируем полуканонический репер [2]. Имеем

$$\psi_5 = \psi_8 = 0\,, \quad \psi_6 = K\psi_7\,, \quad K \neq -1\,, \tag{31}$$

где K — единственный инвариант первого порядка. Подходящим нормированием получим

$$\psi_1 = \psi_7\,, \quad \psi_2 = L\psi_7\,, \tag{32}$$

где L — тоже инвариант. Нормирование $(B_1B_2B_3B_4) = 1$ приводит к каноническому реперу. Имеем еще

$$\psi_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{K+1}{2} + N\right)\psi_7\,, \quad \psi_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{K+1}{2} - N\right)\psi_7\,. \tag{33}$$

Узловые точки произвольной поверхности (f) из (20) будут

$$B_2 = A_2 + \sigma_1 A_4 \qquad B_4 = A_2 + \sigma_2 A_4\,,$$

где $\sigma_{1,2} = \pm\sqrt{(-f)}$. Ее полуканонический репер определяется точками

$$\begin{aligned} B_1 &= \sigma_2 A_1 - (A_2 + A_3)\,, \quad B_2 = A_2 + \sigma_1 A_4\,, \\ B_3 &= A_3 - \sigma_1(A_1 + A_4)\,, \quad B_4 = A_2 + \sigma_2 A_4\,. \end{aligned} \tag{34}$$

Теперь сравнивая полуканонические реперы поверхности (f) и конгруэнции получим следующие формулы перехода:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\sigma_1 + \sigma_1\Theta_4 + \Theta_2 &= \sigma_1(\psi_3 - \psi_6) + \sigma_2\psi_2\,, \\ \mathrm{d}\sigma_2 + \sigma_2\Theta_4 + \Theta_2 &= \sigma_1\psi_1 + \sigma_2\psi_4\,, \\ \sigma_1\Theta_8 + \Theta_6 &= \psi_6\,, \\ \sigma_2\Theta_8 + \Theta_6 &= -\psi_7\,, \\ \sigma_1\Theta_1 + \Theta_3 &= \psi_2 + \psi_3\,, \\ \sigma_2\Theta_1 + \Theta_3 &= \psi_1 + \psi_4 - \psi_7\,. \end{aligned} \tag{35}$$

Из этих формул легко можно найти все величины $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_6, \psi_7, K, L, N$ линейчатой поверхности f при помощи величин Θ_i, a, b конгруэнции.

Литература

[1] *С. П. Фиников:* Метод внешних форм Картана. Москва-Ленинград, 1948.

[2] *Б. Петканчин:* Хиперболични роеве прави в двуосната геометрия. Год. на Соф. унив., *48*, I, 1, 1953—54.

[3] *С. П. Фиников:* Теория пар конгруэнций. Москва, 1956.

Zusammenfassung

KONGRUENZEN IN DER BIAXIALEN GEOMETRIE

GROZA STANILOV, Sophia

Die biaxiale Geometrie B_3 wird durch zwei windschiefe Geraden j und k gegeben. Wir werden nur solche Koordinatensysteme $(A_1A_2A_3A_4; E)$ benutzen, bei denen $A_1 \in j$, $A_3 \in k$ und der Punkt E liegt auf der Gerade $(A_2 + A_3, A_1 + A_4)$, wo $A_2 + A_3 = (A_2A_3) \times j$, $A_1 + A_4 = (A_1A_4) \times k$. Die Infinitesimaltransformationen der Grundpunkte eines Koordinatensystems aus dieser Gesamtheit sind mit (2) angegeben. Die Pfaffschen Θ_i-Formen genügen die Strukturgleichungen (3) des biaxialen Raumes.

Wenn die Punkte A_2 und A_4 auf der Gerade (u, v) liegen, dann sind die quadratischen Formen $r = \Theta_6\Theta_7 - \Theta_5\Theta_8$, $p = (\Theta_6 + \Theta_7)^2 - 4\Theta_5\Theta_8$ invariant. Die lineare Form $q = \Theta_6 - \Theta_7$ ist auch invariant. Die Gleichung $r = 0$ bestimmt die Torsen der Kongruenzen und $p = 0$ – die parabolischen Regelscharen. Die Gleichung $q = 0$ bestimmt das absolute Regelschar der Kongruenzen. Wir wählen die parabolischen Regelscharen als koordinate Regelscharen. Ihre Knotenpunkte A_2 und A_4 sind die parabolischen Punkte der Gerade (u, v).

Weiter finden wir noch das sogenannte harmonische Regelschar der Kongruenzen. Er wird durch die Gleichung $(K_1K_2F_1F_2) = -1$ bestimmt, wo K_1, K_2 die Knotenpunkte dem harmonischen Regelschar und F_1, F_2 die Brennpunkte der Geraden (u, v) sind. Das absolute und harmonische Regelschar bilden das einzige gemeinsame Paar der zwei Involutionen (23) und (24).

Alle Differentialinvarianten $b, \alpha, \beta, p, x_1, x_2$ lassen geometrische Deutungen zu.

In p. 5 untersuchen wir ein Zusammenhang zwischen den Formen der Kongruenzen und den Formen des Regelschars (f), das zu den Kongruenzen gehört.