Fritz Schweiger

Ergodische Theorie der Engelschen und Sylvesterschen Reihen

*Czechoslovak Mathematical Journal*, Vol. 20 (1970), No. 2, 243–245

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100964

Czechoslovak Mathematical Journal, 20 (95) 1970, Praha

# ERGODISCHE THEORIE DER ENGELSCHEN UND SYLVESTERSCHEN REIHEN

FRITZ SCHWEIGER, Salzburg

(Eingelangt am 18. Februar 1969)

**1. Einleitung.** In einigen schönen Arbeiten hat sich T. ŠALÁT ausführlich mit der metrischen Theorie der Reihen von Cantor (siehe etwa [5] und [6]) und LÜROTH [7] befaßt. Es sei bemerkt, daß einige qualitative Aspekte von [7] eine gute Illustration meiner Arbeit [8] bilden, wenn man die „zahlentheoretische Transformation"

$$T(k) : \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right\rangle \to (0, 1\rangle \quad \text{mit} \quad x \to k(k+1)\, x - k$$

betrachtet. A. RÉNYI, P. ERDÖS und P. SZÜSZ haben in mehreren Arbeiten ([1], [4]) die metrische Theorie der Reihen von Engel und Sylvester begonnen. Dabei fällt auf, daß die in der Theorie der $g$-adischen und Kettenbruchentwicklungen so erfolgreichen Methoden der Ergodentheorie (vgl. PHILIPP [3] und der Verf. [8]) nicht verwendet werden. Dies liegt offenbar daran: die mit diesen Reihenentwicklungen verbundenen Transformationen sind zwar ergodisch (metrisch transitiv) bezüglich des Lebesgueschen Maßes, aber es existiert kein absolut stetiges invariantes Maß. Diese beiden Behauptungen zu beweisen, ist der Inhalt dieser Note. Für die elementare Theorie der Reihen von Engel und Sylvester (= Reihen von Engel 2. Art) sei auf Perron [2] verwiesen.

**2. Die Reihen von Engel.** Wir betrachten folgende Abbildung $T : (0, 1\rangle \to (0, 1\rangle$ definiert durch $Tx = T(k)\, x$, wenn $x \in (1/(k+1), 1/k\rangle$ und $T(k)\, x = x(k+1) - 1$. Jedes $x \in (0, 1\rangle$ läßt sich dann schreiben als

$$x = (k_1 + 1)^{-1} + \ldots + [(k_1 + 1) \ldots (k_s + 1)]^{-1} (1 + T^s x)$$

mit $1 \leqq k_1 \leqq k_2 \leqq \ldots \leqq k_s$. Die Menge

$$B(k_1, \ldots, k_s) = \left\{x;\ T^{i-1} x \in \left(\frac{1}{k_i + 1}, \frac{1}{k_i}\right\rangle, \quad i = 1, \ldots, s\right\}$$

nennen wir einen Zylinder. Es gelten dann $T^s B(k_1, \ldots, k_s) = (0, k_s^{-1}\rangle$ und für das Lebesguesche Maß $\lambda(B(k_1, \ldots, k_s)) = [(k_1 + 1) \ldots (k_s + 1) k_s]^{-1}$.

**Satz 1.** *$T$ ist ergodisch bezüglich $\lambda$.*

Beweis. Es sei $E = T^{-1}E$. Es genügt die Dichte von $E$ in einem Zylinder abzuschätzen

$$\lambda(E \cap B(k_1, \ldots, k_s)) = \int_{B(k_1, \ldots, k_s)} \chi_E(x) \, dx =$$

$$= \int_0^{k_s^{-1}} \frac{\chi_E(x)}{(k_1 + 1) \ldots (k_s + 1)} \, dx = \lambda(B(k_1, \ldots, k_s)) \int_0^{k_s^{-1}} k_s \chi_E(x) \, dx .$$

Ist der zweite Faktor rechts kleiner als Eins, so folgt die Behauptung nach dem Lebesgueschen Dichtesatz (vgl. [8], Satz 1 und Satz 2). Wenn nicht, so können wir – da es auf eine Nullmenge nicht ankommt – annehmen: $(0, t^{-1}\rangle \subset E$ für eine ganze Zahl $k_s = t$. Aus $(0, t^{-1}\rangle \subset E$ folgt aber $T^{-1}(0, t^{-1}\rangle \subset E$ und daraus $(0, (t + 1)/t^2\rangle \subset$ $\subset E$. Dann ist aber $T^{-1}(0, (t + 1)/t^2\rangle \subset E$ und damit $(0, (t^2 + t + 1)/t^3\rangle \subset E$. Iteration und Limesbildung zeigt: $(0, 1/(t - 1)\rangle \subset E$. Dies zeigt letztlich $(0, 1\rangle \subset E$.

**Satz 2.** *Es gibt kein Maß $\mu$, welches $T$-invariant ist und zu $\lambda$ absolut stetig.*

Beweis. Es sei

$$\mu(A) = \int_A \varrho(x) \, dx ;$$

so ist

$$\mu(B(k_1, \ldots, k_s)) = \int_0^{k_s^{-1}} \frac{\varrho(x)}{(k_1 + 1) \ldots (k_s + 1)} \, dx$$

und

$$\mu(T^{-1}B(k_1, \ldots, k_s)) = \sum_{t \leqq k_1} \mu(B(t, k_1, \ldots, k_s)) =$$

$$= \Big[\sum_{t \leqq k_1} (t + 1)^{-1}\Big] \cdot \mu(B(k_1, \ldots, k_s)) .$$

Dies ist ein Widerspruch.

**3. Die Reihen von Sylvester.** Hier betrachten wir $T : (0, 1\rangle \to (0, 1\rangle$ mit $Tx =$ $= T(k)\, x$ für $x \in (1/(k + 1), 1/k\rangle$, wobei $T(k)\, x = x - (k + 1)^{-1}$. Dies führt zu einer Entwicklung

$$x = (k_1 + 1)^{-1} + (k_2 + 1)^{-1} + \ldots + (k_s + 1)^{-1} + T^s x$$

mit $k_{j+1} \geqq k_j(k_j + 1)$. Ein Zylinder ist die Menge

$$B(k_1, \ldots, k_s) = \left\{x;\, T^{i-1}x \in \left(\frac{1}{k_i + 1}, \frac{1}{k_i}\right\rangle, \quad i = 1, \ldots, s\right\}.$$

Hier zeigt man leicht

$$T^s B(k_1, \dots, k_s) = \langle 0, k_s^{-1}(k_s + 1)^{-1}\rangle$$

und

$$\lambda(B(k_1, \dots, k_s)) = \frac{1}{k_s(k_s + 1)}.$$

**Satz 3.** *T ist ergodisch bezüglich λ.*

Beweis. Man sieht analog

$$\lambda(E \cap B(k_1, \dots, k_s)) = \lambda(B(k_1, \dots, k_s)) \int_0^{k_s^{-1}(s+1)^{-1}} k_s(k_s + 1)\, \chi_E(x)\, dx.$$

Wiederum ist nur der Fall interessant, daß der zweite Faktor rechts für mindestens ein $k_s = t$ gleich 1 ist. Das bedeutet $\langle 0, t^{-1}(t+1)^{-1}\rangle \subset E$, woraus man sieht (durch Anwendung von $T^{-1}$): $\langle 0, 2t^{-1}(t+1)^{-1}\rangle \subset E$. Iteration gibt einen „overflow" und letztlich $\langle 0, 1\rangle \subset E$.

**Satz 4.** *Es gibt kein bezüglich λ absolut stetiges T-invariantes Maß.*

Beweis. Mit Hilfe einer Dichtefunktion erhält man analog zu Satz 2:

$$\mu(T^{-1}B(k_1, \dots, k_s)) = \sum_{t \leqq k_1(k_1+1)} \mu(B(t, k_1, \dots, k_s)) =$$
$$= k_1(k_1 + 1)\, \mu(B(k_1, \dots, k_s)).$$

*Literatur*


[1] *P. Erdös, A. Rényi, P. Szüsz:* On Engel's and Sylvester's series, Ann. Univ. Sci. Budap. Eötvös *1* (1958), 7—32.

[2] *O. Perron:* Irrationalzahlen, Göschens Lehrbücherei Bd. 1, 2. Aufl., Berlin 1939.

[3] *W. Philipp:* Some metrical theorems in number theory, Pacific J. Math. *20* (1967), 109—127.

[4] *A. Rényi:* A new approach to the theory of Engel's series, Ann. Univ. Sci. Budap. Eötvös *5* (1962), 25—32.

[5] *T. Šalát:* Über die Hausdorffsche Dimension der Menge der Zahlen mit beschränkten Folgen von Ziffern in Cantorschen Entwicklungen, Czech. Math. J. *15* (1965), 540—552.

[6] *T. Šalát:* Über die Cantorschen Reihen, Czech. Math. J. *18*, (1968), 25—56.

[7] *T. Šalát:* Zur metrischen Theorie der Lürothschen Entwicklungen der reellen Zahlen, Czech. Math. J. *18*, 489—522.

[8] *F. Schweiger:* Metrische Theorie einer Klasse zahlentheoretischer Transformationen, Acta Arithm. *15* (1968), 1—18.



*Anschrift des Verfassers:* A-5020 Salzburg, Porschestr. 1, Österreich (Mathematisches Institut der Universität).