Aplikace matematiky

Klaus Lommatzsch

Ein notwendiges und hinreichendes Optimalitätskriterium für allgemeine quadratische Optimierungsprobleme

Aplikace matematiky, Vol. 19 (1974), No. 3, 193--197

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103530

EIN NOTWENDIGES UND HINREICHENDES OPTIMALITÄTSKRITERIUM FÜR ALLGEMEINE QUADRATISCHE OPTIMIERUNGSPROBLEME

KLAUS LOMMATZSCH

(Eingegangen am 8. März 1973)

Die Aufgabe lautet

$$\min \{f(x, x) | x \in M\} , \tag{1}$$

dabei bezeichnen:

M eine konvexe abgeschlossene Teilmenge eines n-dimensionalen affenen Raumes A^n; $x^T = (x_1, \ldots, x_n)$ Elemente des A^n;

$f(x, x)$ eine über dem A^n definierte quadratische Funktion

$$f(x, x) = x^T C x + 2p^T x , \tag{2}$$

wobei C eine reellwertige symmetrische $(n \times n)$-Matrix und p ein reellwertiger n-gliedriger Vektor sind.

DIE ZUGEORDNETE PARAMETRISCHE AUFGABE

Der Aufgabe (1) wird das folgende lineare mehrparametrische Problem mit dem Parametervektor y in der Zielfunktion zugeordnet:

$$\min \{f(y, x) | x \in M\} , \quad y \in A^n , \tag{3}$$

wobei

$$f(y, x) = y^T C x + p^T x + p^T y . \tag{4}$$

Unter der Lösung einer Aufgabe (3) wird die Angabe einer bestimmten Aufteilung des Raumes der Parameter y verstanden (vgl. dazu [1]). Eine solche Aufteilung läßt sich mit Hilfe der folgenden K-Mengen erzeugen:

(5) **Definition.** *Es sei $\bar{x}$ ein Elementen aus M, dann wird $K_M^{\bar{x}}$,*

$$K_M^{\bar{x}} = \{y \in A^n | f(y, x) \geqq f(y, \bar{x}), x \in M\},$$

als die zu $\bar{x}$ gehörige K-Menge der Aufgabe (3) bezeichnet.

Für die K-Mengen lassen sich nun eine Reihe von Eigenschaften nachweisen:

(6) – die K-Mengen sind konvex und abgeschlossen;

(7) – der Durchschnitt von zu einer Aufgabe (3) gehörenden K-Mengen ist wieder eine K-Menge dieser Aufgabe;

(8) – gilt für zwei K-Mengen $K_M^{\bar{x}}$ und $K_M^{\hat{x}}$ einer Aufgabe (3), daß $K_M^{\bar{x}} \neq K_M^{\hat{x}}$ ist, so haben beide K-Mengen entweder höchstens Randpunkte gemeinsam oder eine der beiden K-Mengen liegt ganz im Rand der anderen K-Menge;

(9) – hat die Matrix C in (4) den Rang n, so sind die K-Mengen einer solchen Aufgabe Kegel mit dem Scheitelpunkt y^s, wobei $Cy^s + p = 0$;

(10) – ist der Rang d der Matrix C in (4) kleiner als n, so sind die nichtleeren K-Mengen einer solchen Aufgabe „Bündel" $(n - d)$-dimensionaler Unterräume des A^n.

Eine eingehendere Untersuchung zu den K-Mengen einschließlich einer Darstellung des Zusammenhangs zu den Stabilitätsbereichen parametrischer Aufgaben findet sich in [2].

Liegen zwei Aufgaben der Art (3) vor, und unterscheiden sie sich nur darin, daß der Restriktionsbereich M^1 der einen Aufgabe Teilmenge des Restriktionsbereiches M^2 der anderen Aufgabe ist, so gilt für die K-Mengen $K_{M^1}^{\bar{x}}$ und $K_{M^2}^{\bar{x}}$ mit $\bar{x} \in M^1$, daß

(11) $$K_{M^2}^{\bar{x}} \subset K_{M^1}^{\bar{x}} .$$

DIE QUADRATISCHE AUFGABE

Der im vorangegengenen Abschnitt eingeführte Raum der Parameter y und der Raum der Elemente x lassen sich als ein und derselbe Raum ansehen. Die durch die K-Mengen erzeugte Aufteilung des Parameterraumes impliziert dann auch eine Aufteilung von M. Damit werden Aussagen der Art $\hat{x} \in K_M^{\bar{x}}$, $\hat{x} \notin K_M^{\bar{x}}$ mit $\bar{x}$, $\hat{x} \in M$ sinnvoll und man kann von den zu einer Aufgabe (1) gehörenden K-Mengen sprechen.

Die Aufgabe (1) möge nun in $x^0 \in M$ ein lokales Minimum besitzen, d.h. es existiert eine Umgebung U von x^0 derart, daß

(12) $$f(x, x) \geqq f(x^0, x^0), \quad x \in U(x^0) \cap M .$$

(13) **Lemma.** *Besitzt $f(x, x)$ über M in x^0 ein lokales Minimum, so gilt $x^0 \in K_M^{x^0}$.*

Beweis. Es sei $\bar{x}$ ein Element aus M, $\bar{x} \neq x^0$. Der Konvexität von M wegen liegt auch die Strecke

$$G(\bar{x}, x^0) = \{x \in A^n | x = v\bar{x} + (1 - v)\, x^0, 0 \leqq v \leqq 1\} \tag{14}$$

in M. Der Anstieg $\varphi_G(v)$ von $f(x, x)$ über $G(\bar{x}, x^0)$ läßt sich in folgender Weise darstellen (dabei wird die Voraussetzung der Symmetrie der Matrix C ausgegenutzt):

$$\tfrac{1}{2}\varphi_G(v) = v(f(\bar{x}, \bar{x}) - f(\bar{x}, x^0)) + (1 - v)\,(f(x^0, \bar{x}) - f(x^0, x^0))\,. \tag{15}$$

Nach Voraussetzung existiert ein $\bar{v} > 0$ derart, daß $\frac{1}{2}\varphi_G(v) \geqq 0$ für $0 \leqq v < \bar{v}$. Daraus folgt $f(x^0, \bar{x}) \geqq f(x^0, x^0)$. Da $\bar{x}$ beliebig aus M gewählt war, gilt damit $x^0 \in K_M^{x^0}$.

(16) **Lemma.** *Besitzt $f(x, x)$ über M in x^0 ein lokales Minimum und gilt $x^0 \in K_M^{\bar{x}}$ mit $\bar{x} \in M$ und $\bar{x} \neq x^0$, so folgt entweder $\bar{x} \notin K_M^{\bar{x}}$ oder $f(x, x)$ ist über der (durch (14) definierten) Strecke $G(\bar{x}, x^0)$ konstant.*

Beweis. Nach Voraussetzung und Lemma 1 gilt, daß $x^0 \in K_M^{\bar{x}} \cap K_M^{x^0}$; daraus folgt unter Verwendung der Definition (5), daß $f(x^0, \bar{x}) = f(x^0, x^0)$ ist.

Unter Verwendung der Formeln (14) und (15) erhält man dann aber $f(\bar{x}, \bar{x}) \geqq$ $\geqq f(\bar{x}, x^0)$; d.h. aus der Voraussetzung, daß $f(x, x)$ über M in x^0 ein lokales Optimum besitzt, ergibt sich dann, daß der Anstieg $\varphi_G(v)$ von $f(x, x)$ über der gesamten Strecke $G(\bar{x}, x^0)$ nichtnegativ ist. Gilt $\varphi_G(1) > 0$, so hat man $f(\bar{x}, \bar{x}) > f(\bar{x}, x^0)$, also $\bar{x} \notin K_M^{\bar{x}}$; für $\varphi_G(1) = 0$ bekommt man $f(\bar{x}, \bar{x}) = f(\bar{x}, x^0)$, d.h. $f(x, x)$ ist über $G(\bar{x}, x^0)$ konstant.

Das Lemma (16) läßt sich noch verschärfen, dazu wird die Eigenschaft (11) parametrischer Aufgaben ausgenutzt:

(17) **Lemma.** *Besitzt $f(x, x)$ über M in x^0 ein lokales Minimum und gilt $x^0 \in K_M^{\bar{x}}$ mit $\bar{x} \neq x^0$, so folgt entweder $\bar{x} \notin K_{G(\bar{x},x^0)}^{\bar{x}}$ oder $G(\bar{x}, x^0) \subset K_{G(\bar{x},x^0)}^{\bar{x}} \cap K_{G(\bar{x},x^0)}^{x^0}$.*

Beweis. Nach (11) gilt, daß x^0 auch in $K_{G(\bar{x},x^0)}^{\bar{x}} \cap K_{G(\bar{x},x^0)}^{x^0}$ liegt. Da $f(x, x)$ auch über $G(\bar{x}, x^0)$ in x^0 ein lokales Minimum besitzt, folgt dann wieder wie im Beweis zu Lemma (16), daß $f(x^0, \bar{x}) = f(x^0, x^0)$ und damit $f(\bar{x}, \bar{x}) \geqq f(\bar{x}, x^0)$ ist. Gilt $f(\bar{x}, \bar{x}) > f(\bar{x}, x^0)$, so bedeutet das $\bar{x} \notin K_{G(x^0,\bar{x})}^{\bar{x}}$; besteht dagegen die Gleichheit $f(\bar{x}, \bar{x}) = f(\bar{x}, x^0)$, so ist auch $f(\bar{x}, \bar{x}) = f(\bar{x}, x)$ und $f(\bar{x}, x^0) = f(\bar{x}, x)$ für alle $x \in G(\bar{x}, x^0)$, das bedeutet aber $\bar{x} \in K_{G(\bar{x},x^0)}^{\bar{x}} \cap K_{G(\bar{x},x^0)}^{\bar{x}}$, womit Lemma (17) vollständig gezeigt ist.

Die so nachgewiesenen notwendigen Bedingungen für ein lokales Minimum einer Aufgabe (1) führen zu einem notwendigen und hinreichenden Optimalitätskriterium:

(18) **Satz.** *Die Bedingungen*

a) $x^0 \in K^M_{x^0} \cap M$,

b) aus $x^0 \in K^{\bar{x}}_M \cap K^{x^0}_M$ *folgt entweder* $\bar{x} \notin K^{\bar{x}}_{G(\bar{x},x^0)}$ *(Fall 1)*

oder $G(\bar{x}, x^0) \subset K^{\bar{x}}_{G(\bar{x},x^0)} \cap K^{x^0}_{G(\bar{x},x^0)}$ *(Fall 2)*

(wobei $G(\bar{x}, x^0)$ *durch (14) definiert ist), sind notwendig und hinreichend dafür, daß* $f(x, x)$ *über* M *in* x^0 *ein lokales Minimum besitzt.*

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingungen (a) und (b) ergibt sich aus den Lemmata (13), (16) und (17).

Es sei nun x^0 ein Element aus M, welches die Bedingung a) des Satzes erfüllt. Dann gilt $f(x, x^0) \geqq f(x^0, x^0)$ für alle $x \in M$. Ist $f(x, x^0) > f(x^0, x^0)$ für alle $x \in M$ mit $x \neq x^0$, so gibt es eine Umgebung U von x^0, daß $f(x, x)$ auf den Strecken $G(x, x^0)$ aus M in $U(x^0)$ in Richtung auf x^0 abnimmt. Gilt für ein $\bar{x} \in M$, daß $f(\bar{x}, x^0) = f(x^0, x^0)$, so bedeutet das, daß $x^0 \in K^{\bar{x}}_M$. Nach Bedingung b) folgt dann (Fall 1), daß es ein $\hat{x} \in G(\bar{x}, x^0)$ gibt mit $f(\bar{x}, \bar{x}) > f(\bar{x}, \hat{x})$. Wegen der Linearität der Funktion $f(\bar{x}, x)$ führt das zu $f(\bar{x}, \bar{x}) > f(\bar{x}, x^0)$, d.h. längst dieser Strecke $G(\bar{x}, x^0)$ nimmt $f(x, x)$ in Richtung auf x^0 ab (vgl. dazu Darstellung (15)). Der Fall 2 der Bedingung b) führt direkt zu $f(x, x) = f(x^0, x^0)$ für alle $x \in G(\bar{x}, x^0)$.

Damit kann $f(x, x)$ längst aller in M gelegenen Strecken mit dem Endpunkt x^0 in einer gewissen Umgebung $U(x^0)$ in Richtung auf x^0 nicht mehr zunehmen, womit auch die Hinlänglichkeit der Bedingungen a) und b) gezeigt ist.

Aus diesem Satz (18) ergibt sich insbesondere auch das nachfolgende Optimalitätskriterium:

(19) **Lemma.** *Gilt* $x^0 \in K^{x^0}_M \cap M$ *und* $x^0 \notin K^x_M$ *für alle* x *aus* M *mit* $x \neq x^0$, *so besitzt* $f(x, x)$ *über* M *in* x^0 *ein lokales Optimum.*

Die Voraussetzung dieses Satzes ist offenbar erfüllt, falls x^0 ein relativ innerer Punkt von $K^{x^0}_M$ ist und keine andere K-Menge der betrachteten Aufgabe $K^{x^0}_M$ umfaßt (vgl. (8)).

Für den Fall konvexer Zielfunktionen in Aufgaben der Art (1) vereinfacht sich das Optimalitätskriterium aus Satz (18):

(20) **Lemma.** *Es sei* $f(x, x)$ *eine über* M *konvexe Funktion. Die Bedingung* $x^0 \in K^{x^0}_M \cap M$ *ist dann notwendig und hinreichend dafür, daß die Aufgabe* (1) *in* x^0 *ein lokales Optimum besitzt.*

Zum Nachweis dieser Behauptung ist nur zu beachten, daß aus der Konvexität von $f(x, x)$ über M folgt, daß für beliebig gewählte Punkte $\bar{x}$ und x^0 aus M die Ungleichung

$$f(\bar{x}, \bar{x}) - f(\bar{x}, x^0) \geqq f(\bar{x}, x^0) - f(x^0, x^0)$$

gilt.

Lemma (20) legt die Vermutung nahe, daß zwischen den Kuhn-Tucker-Bedingungen für Aufgaben der Art (1) und der Bedingung, daß ein Punkt aus M in der ihm zugehörigen K-Menge liegt, eine enge Beziehung besteht. Für den Fall eines polyedrischen Restriktionsbereiches M, d.h. $M = \{x \in A^n \mid B^i x \leqq b_i, i = 1, \ldots, m\}$, läßt sich mit Hilfe des Satzes von Farkas die Äquivalenz der beiden genannten Kriterium sofort einsehen: die Bedingung $x^0 \in K_M^{x^0} \cap M$ führt zu dem System

$$((x^0)^T C + p)^T (x - x^0) \geqq 0\,, \quad B^i(x - x^0) \leqq b_i\,, \quad i \in I^0\,,$$

wobei die Indexmenge $I^0 \subset \{1, \ldots, m\}$ gerade die Indizes enthält, für die $B^i x^0 = b_i$ gilt; dieses System ist aber genau dann lösbar, falls es Zahlen $u_i \geqq 0$, $i \in I^0$, gibt, mit

$$-((x^0)^T C + p) = \sum_{i \in I^0} u_i B^i\,;$$

letztere Beziehung stellt aber eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Gültigkeit der Kuhn-Tucker-Bedingungen dar (vgl. dazu z.B. [3]).

Literatur

[1] *Nožička, F. - Guddat, J. - Bank, B. - Hollatz, H.:* Theorie der linearen parametrischen Optimierung. Akademie-Verlag Berlin 1973.

[2] *Lommatzsch, K.:* Lineare parametrische Optimierung über allgemeinen konvexen Restriktionsbereichen. Sborník z II. celostátní konference O matematických metodách v ekonomii, Harmonia 1972. Ekonomické matematická laboratoř při Ekonomickém ústavu ČSAV, Praha 1973.

[3] *Künzi, H. P. - Krelle, W.:* Nichtlineare Programmierung. Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1962.

Souhrn

NUTNÁ A POSTAČUJÍCÍ KRITÉRIA OPTIMALITY PRO OBECNÉ ÚLOHY KVADRATICKÉHO PROGRAMOVÁNÍ

KLAUS LOMMATZSCH

Článek se zabývá úlohou minimalizace kvadratické funkce na konvexním a uzavřeném restrikčním oboru. Pomocí tzv. K-množin, přiřazených výchozí úloze, je formulováno a dokázáno kritérium optimality jako vztah mezi body a množinami (věta 18). Souvislost tohoto kritéria s Kuhn - Tuckerovými podmínkami je ukázána pro případ, že je cílová funkce kvadratické úlohy konvexní a restrikční obor polyedrický.

Anschrift des Verfassers: Dr. *Klaus Lommatzsch*, Sektion Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin. Unter den Linden 6, 108 Berlin, DDR.