

Aplikace matematiky

Jozef Sumec; Vendelín Szabó

Algoritmy.43. TRTNV. Riešenie systému lineárnych algebraických rovníc s trojdiagonálnou maticou

Aplikace matematiky, Vol. 22 (1977), No. 6, 470--472

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/103722>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1977

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

43. TRINV

RIEŠENIE SYSTÉMU LINEÁRNYCH ALGEBRAICKÝCH ROVNÍC
S TROJDIAGONÁLNOU MATICOU

Ing. JOZEF SUMEC, CSc., VENDELÍN SZABÓ, CSc., Ústav stavebníctva
a architektúry SAV, Dúbravská cesta, 885 46 Bratislava.

Procedúra *TRINV* rieši priamou metódou systém lineárnych algebraických rovníc $Gx = r$, kde G je štvorcová trojdiagonálna matica stupňa n , x a r sú stĺpcové matice stupňa n .

$$G = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & & & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & & & \\ & b_3 & a_3 & c_3 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & & a_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & b_n & a_n \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad r = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix},$$

$a_i, b_i, c_i, i = 1, 2, \dots, n$ sú nenulové reálne prvky. Z formálnych dôvodov, vyplývajúcich z odvodu uvažujú sa prvky $b_1 = c_n = 1$.

Zovšeobecnením riešenia pre symetrické trojdiagonálne matice [1] bolo odvodené riešenie pre všeobecné matice typu G , ktoré dovoľuje vyjadrenie prvkov inverznej matice vo tvare súčiny dvoch funkcií, z ktorých jedna je závislá len od riadkového a druhá len od stĺpcového indexu. Riešenie potom píšeme vo tvare

$$x_i = V_i \sum_{k=1}^i U_k r_k + U_i \sum_{k=i+1}^n V_k r_k.$$

Jednou z výhod takéhoto spôsobu výpočtu je, že pre uloženie prvkov inverznej matice namiesto $n \cdot n$ je treba len $4n$ pamäťových miest.

procedure *TRINV*($a, b, c, r, eps, det, n, VON$);

value eps, n ;

integer n ;

real det, eps ;

array a, b, c, r ;

label VON ;

comment 1.: Prvky a_i, b_i, c_i sa načítavajú po diagonálach v poradí $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n$. V priebehu výpočtu sa do masívu $a[1 : n]$ dosadí riešenie systému. Z ďalších formálnych parametrov r znamená vektor pravej strany systému rovníc, det hodnotu determinantu a n stupeň matice G , eps je kladná konštanta, ktorej hodnota sa rádove rovná zaokruhľovacej chybe počítača, VON je návěstie, kde počítač pokračuje, ak hodnota $abs(b1)$ je relatívne malé číslo;

begin integer i, j ;

real $b1, b2$;

array $u, v, u1, v1[1 : n]$;

$v[n] := (-1) \uparrow n$;

$v[n - 1] := -a[n] \otimes v[n]/b[n]$;

for $i := n - 2$ **step** -1 **until** 1 **do**

$v[i] := -(a[i + 1] \otimes v[i + 1] + c[i + 1] \otimes v[i + 2])/b[i + 1]$;

$b1 := -a[1] \otimes v[1] - c[1] \otimes v[2]$;

$b2 := 1$;

for $i := 1$ **step** 1 **until** n **do**

$b2 := b2 \otimes b[i]$;

$det := b1 \otimes b2$;

if $abs(b1) \leq eps$ **then goto** VON ;

comment 2.: Ak hodnota $abs(b1)$ je blízka nule, nastane prerušenie výpočtu a skok z tela procedúry na návěstie VON ;

$u[1] := -1/b1$;

$u[2] := -a[1] \otimes u[1]/b[2]$;

for $i := 3$ **step** 1 **until** n **do**

$u[i] := -(a[i - 1] \otimes u[i - 1] + c[i - 2] \otimes u[i - 2])/b[i]$;

comment 3.: Nasleduje testovanie prvkov matice G . Ak je matica nesymetrická, uskutoční sa skok na návěstie $A1$;

for $i := 1$ **step** 1 **until** $n - 1$ **do**

if $b[i + 1] \neq c[i]$ **then goto** $A1$;

for $i := 1$ **step** 1 **until** n **do**

begin $v1[i] := v[i]$;

$u1[i] := u[i]$

end;

goto $A2$;

$A1$: $v1[n] := v[n]$;

$v1[n - 1] := -a[n] \otimes v1[n]/c[n - 1]$;

for $i := n - 2$ **step** -1 **until** 1 **do**

$v1[i] := -(a[i + 1] \otimes v1[i + 1] + b[i + 2] \otimes v1[i + 2])/c[i]$;

$u1[1] := 1/(a[1] \otimes v1[1] + b[2] \otimes v1[2])$;

$u1[2] := -a[1] \otimes u1[1]/c[1]$;

for $i := 3$ **step** 1 **until** n **do**

$u1[i] := -(a[i - 1] \otimes u1[i - 1] + b[i - 1] \otimes u1[i - 2])/c[i - 1]$;

comment 4.: Nasleduje priame riešenie systému $Gx = r$. Vo výpočte sa použijú prvky pomocných polí $u, v, u1, v1$. Prvky polí a, b, c, r sa počas výpočtu menia;

```
A2: for i := 1 step 1 until n do
  begin a[i] := u[i] ⊗ r[i];
        b[i] := v1[i] ⊗ r[i]
  end;
  r[n] := 0;
  for i := n - 1 step -1 until 1 do
    r[i] := r[i + 1] + b[i + 1];
    c[1] := a[1];
    for i := 2 step 1 until n do
      c[i] := a[i] + c[i - 1];
    for i := 1 step 1 until n do
      a[i] := v[i] ⊗ c[i] + u1[i] ⊗ r[i]
```

end procedury TRINV;

Procedúru TRINV môžeme ľahko upraviť na procedúru, ktorá počíta prvky inverznej matice G^{-1} . Pre tento účel zmeníme telo procedúry nasledovne:

- z formálnych parametrov v hlavičke procedúry TRINV sa vynechá parameter r ,
- príkazy – **comment 4.** ... až **end** procedury TRINV; – sa nahradia nasledovnými príkazmi

comment 4.: V poli $b[1 : n]$ bude uložený vždy i -ty riadok inverznej matice. Vzhľadom nato je treba vhodne upraviť tlač;

```
for i := 1 step 1 until n do
  for j := 1 step 1 until n do
    if j ≤ i then b[j] := v[i] ⊗ u[j]
      else b[j] := u1[i] ⊗ v1[j]
```

end procedury TRINV;

Popísaná procedúra umožňuje priamym spôsobom získať:

- ľubovoľný prvok riešenia systému lineárnych algebraických rovníc s trojdiagonálnou maticou,
- hodnotu determinantu matice,
- ľubovoľný prvok inverznej matice.

Algoritmus bol pôvodne napísaný a vyskúšaný v jazyku FORTRAN IV pre počítač CDC 3300 a do revidovaného jazyka ALGOL 60 len prepísaný.

Procedúra TRINV bola používaná pri výpočte numerických derivácií pomocou splajn-funkcií z funkčných hodnôt, nameraných experimentálne na diskkrétnej množine bodov nezávisle premennej.

Literatúra

- [1] Б. Бурхбергер, Г. А. Емеляненко: Методы обращения трехдиагональных матриц. ЖВММФ, 13 (1973), 546–554.