Karel Svoboda

Sur une application de la théorie des correspondances développables de E. Čech

Archivum Mathematicum, Vol. 2 (1966), No. 1, 33--41

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104604`

SUR UNE APPLICATION DE LA THÉORIE DES CORRESPONDANCES DÉVELOPPABLES DE E. ČECH

KAREL SVOBODA, BRNO

Présenté le 14 Septembre 1965

Le but de ce mémoire consiste dans des études plus détaillées des correspondances développables entre deux congruences de droites plongées dans des espaces symplectiques à une dimension impaire quelconque. Ces études ont pour base la théorie développée par M. E. Čech dans son travail [1] dans le cas des congruences non-paraboliques d'un espace projectif à trois dimensions. Dans ce qui suit, nous nous proposons de montrer qu'il est possible de définir, même pour les congruences de droites dans des espaces symplectiques à une dimension quelconque, les déformations spéciales, qui ont été considérées par E. Čech dans le cas mentionné, et de déduire leurs propriétés essentielles.

Ce travail prend pour point de départ les résultats du mémoire antérieur [2] qui a été consacré à l'étude de la déformation symplectique du second ordre des congruences en question.

1. Soit L une congruence non-parabolique de droites plongée dans un espace symplectique Sp_{2n-1} à $2n - 1$ dimensions ($n \geqq 3$). On peut associer, à une droite quelconque de L, un repère mobile formé de $2n$ points linéairement indépendants $A_1, \ldots, A_{2n}$ de manière que les équations fondamentales de la congruence L ont la forme

$$\mathrm{d}A_i = \omega_i^j A_j \qquad (i, j = 1, \ldots, 2n), \tag{1.1}$$

les coefficients ω_i^j étant exprimés, d'après les résultats du mémoire [2], par les relations

$$\begin{aligned} &\omega_1^4 = 0,\ \omega_2^3 = 0, && \omega_3^6 = 0,\ \omega_4^5 = 0,\\ &\omega_3^5 = a\omega_1, && \omega_4^6 = b\omega_2,\\ &\omega_1^2 = \alpha_1\omega_1 - \alpha_0\omega_2, && \omega_2^1 = \beta_1\omega_2 - \beta_0\omega_1,\\ &\omega_3^4 = a\alpha_2\omega_1 - \alpha_1\omega_2, && \omega_4^3 = b\beta_2\omega_2 - \beta_1\omega_1,\\ &\omega_5^6 = \alpha_3\omega_1 - b\alpha_2\omega_2, && \omega_6^5 = \beta_3\omega_2 - a\beta_2\omega_1,\\ &\omega_{2\alpha-1}^\beta = 0,\ \omega_{2\alpha}^\beta = 0 \quad (\alpha = 1, 2;\ \beta = 2\alpha + 3, \ldots, 2n),\\ &\omega_5^j = \gamma_5^j\omega_1,\ \omega_6^j = \gamma_6^j\omega_2 \quad (j = 7, \ldots, 2n), \end{aligned} \tag{1.2}$$

où

$$\omega_1 = \omega_1^3,\ \omega_2 = \omega_2^4. \tag{1.3}$$

On a, en outre, les relations symplectiques

$$
\begin{gathered}
\omega_1^1 + \omega_2^2 = 0,\ \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0,\ \omega_5^5 + \omega_6^6 = 0, \\
\omega_3^1 = -\omega_2,\ \omega_4^2 = -\omega_1,\ \omega_5^3 = -b\omega_2,\ \omega_6^4 = -a\omega_1, \\
\omega_3^2 = 0,\ \omega_4^1 = 0,\ \omega_5^4 = 0,\ \omega_6^3 = 0, \\
\omega_\beta^{2\alpha-1} = 0,\ \omega_\beta^{2\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2;\ \beta = 2\alpha + 3, \ldots, 2n), \\
\omega_j^5 = \gamma_6^k g_{kj}\omega_2,\ \omega_j^6 = -\gamma_5^k g_{kj}\omega_1 \quad (j, k = 7, \ldots, 2n).
\end{gathered} \tag{1.4}
$$

Il faut supprimer, dans les systèmes précédents (1.2) et (1.4), les équations qui expriment les formes ω_i^j pour $i, j > 6$, si $n = 3$.

Toutes les considérations qui suivent s'appuient sur la supposition que les fonctions a, b, α_i, β_i $(i = 0, \ldots, 3)$ soient différentes de zéro.

Les équations de Pfaff (1.2) ont pour conditions d'intégrabilité les relations extérieures quadratiques

$$
\begin{gathered}
[\omega_1(\mathrm{d}a + a \,.\, \overline{\omega_1^1 - 2\omega_3^3 - \omega_5^5})] = 0, \\
[\omega_2(\mathrm{d}b + b \,.\, \overline{\omega_2^2 - 2\omega_4^4 - \omega_6^6})] = 0, \\
[\omega_1(\mathrm{d}\alpha_1 + \alpha_1 \,.\, \overline{\omega_2^2 - \omega_3^3})] - [\omega_2(\mathrm{d}\alpha_0 + \alpha_0 \,.\, \overline{2\omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_4^4})] = 0, \\
a[\omega_1(\mathrm{d}\alpha_2 + \alpha_2 \,.\, \overline{\omega_4^4 - \omega_5^5})] - [\omega_2(\mathrm{d}\alpha_1 + \alpha_1 \,.\, \overline{\omega_2^2 - \omega_3^3})] = 0, \\
[\omega_1(\mathrm{d}\alpha_3 + \alpha_3 \,.\, \overline{\omega_1^1 - \omega_3^3 - \omega_5^5 + \omega_6^6})] - b[\omega_2(\mathrm{d}\alpha_2 + \alpha_2 \,.\, \overline{\omega_4^4 - \omega_5^5})] = 0, \\
[\omega_1(\mathrm{d}\beta_0 + \beta_0 \,.\, \overline{2\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3})] - [\omega_2(\mathrm{d}\beta_1 + \beta_1 \,.\, \overline{\omega_1^1 - \omega_4^4})] = 0, \\
[\omega_1(\mathrm{d}\beta_1 + \beta_1 \,.\, \overline{\omega_1^1 - \omega_4^4})] - b[\omega_2(\mathrm{d}\beta_2 + \beta_2 \,.\, \overline{\omega_3^3 - \omega_6^6})] = 0, \\
a[\omega_1(\mathrm{d}\beta_2 + \beta_2 \,.\, \overline{\omega_3^3 - \omega_6^6})] - [\omega_2(\mathrm{d}\beta_3 + \beta_3 \,.\, \overline{\omega_2^2 - \omega_4^4 + \omega_5^5 - \omega_6^6})] = 0
\end{gathered} \tag{1.5}
$$

et, en outre, dans le cas de $n > 3$, les relations ultérieures

$$
\begin{gathered}
[\omega_1(\mathrm{d}\gamma_5^j + \gamma_5^j \,.\, \overline{\omega_1^1 - \omega_3^3 - \omega_5^5} + \gamma_5^k\omega_k^j)] = 0, \\
[\omega_2(\mathrm{d}\gamma_6^j + \gamma_6^j \,.\, \overline{\omega_2^2 - \omega_4^4 - \omega_6^6} + \gamma_6^k\omega_k^j)] = 0 \\
(j, k = 7, \ldots, 2n).
\end{gathered} \tag{1.6}
$$

Comme d'habitude, nous introduirons le symbole δ pour indiquer une différentiation relative au changement des paramètres secondaires et nous poserons $\omega_i^j(\delta) = e_i^j$. Cela étant, on a, d'après (1.3) et (1.5), en particulier

$$
\begin{aligned}
\delta\omega_1 &= (e_1^1 - e_3^3)\,\omega_1, & \delta\omega_2 &= (e_2^2 - e_4^4)\,\omega_2, \\
\delta a &= -(e_1^1 - 2e_3^3 - e_5^5)\,a, & \delta b &= -(e_2^2 - 2e_4^4 - e_6^6)\,b, \\
\delta\alpha_0 &= -(2e_2^2 - e_1^1 - e_4^4)\,\alpha_0, & \delta\beta_0 &= -(2e_1^1 - e_2^2 - e_3^3)\,\beta_0, \\
\delta\alpha_1 &= -(e_2^2 - e_3^3)\,\alpha_1, & \delta\beta_1 &= -(e_1^1 - e_4^4)\,\beta_1, \\
\delta\alpha_2 &= -(e_4^4 - e_5^5)\,\alpha_2, & \delta\beta_2 &= -(e_3^3 - e_6^6)\,\beta_2
\end{aligned} \tag{1.7}
$$

et il en résulte, d'après (1.2),

$$(1.8) \qquad \begin{aligned} \delta\omega_1^2 &= (e_1^1 - e_2^2)\,\omega_1^2, & \delta\omega_2^1 &= (e_2^2 - e_1^1)\,\omega_2^1, \\ \delta\omega_3^4 &= (e_3^3 - e_4^4)\,\omega_3^4, & \delta\omega_4^3 &= (e_4^4 - e_3^3)\,\omega_4^3. \end{aligned}$$

Les équations (1.7) et (1.8) montrent que les formes différentielles quadratiques

$$(1.9) \qquad \begin{aligned} \varphi &= \omega_1^2\omega_2^1, & \psi &= \omega_3^4\omega_4^3, \\ f_1 &= \frac{\omega_2\omega_1^2\omega_4^3}{\omega_1}, & f_2 &= \frac{\omega_1\omega_2^1\omega_3^4}{\omega_2}, \\ g_1 &= \frac{\omega_2\omega_1^2}{\omega_1\omega_3^4}, & g_2 &= \frac{\omega_1\omega_2^1}{\omega_2\omega_4^3} \end{aligned}$$

sont invariantes. En suivant les idées principales de E. Čech [1] nous appelerons φ la *forme ponctuelle*, ψ la *forme planaire*, f_1 la *première* et f_2 la *seconde forme focale*, g_1 la *première* et g_2 la *seconde forme asymptoticale* de la congruence L. En outre, nous appelerons élément linéaire symplectique de la congruence L l'ensemble des formes φ, ψ, f_1, f_2, g_1, g_2.

Comme les formes en question sont liées par les identités

$$(1.10) \qquad \varphi\psi = f_1 f_2, \quad f_1 = \psi g_1 = \frac{\varphi}{g_2}, \quad f_2 = \frac{\varphi}{g_1} = \psi g_2,$$

l'élément linéaire symplectique est déterminé parfaitement par trois des formes considérées.

2. Une congruence L d'un espace symplectique Sp_{2n-1} se trouve définie, d'après (1.2), (1.3) et (1.4), par le système suivant d'équations différentielles

$$(2.1) \qquad \begin{aligned} \mathrm{d}A_1 &= \omega_1^1 A_1 + \omega_1^2 A_2 + \omega_1 A_3, \\ \mathrm{d}A_2 &= \omega_2^1 A_1 + \omega_2^2 A_2 + \omega_2 A_4, \\ \mathrm{d}A_3 &= -\omega_2 A_1 + \omega_3^3 A_3 + \omega_3^4 A_4 + a\omega_1 A_5, \\ \mathrm{d}A_4 &= -\omega_1 A_2 + \omega_4^3 A_3 + \omega_4^4 A_4 + b\omega_2 A_6, \\ \mathrm{d}A_5 &= -b\omega_2 A_3 + \omega_5^5 A_5 + \omega_5^6 A_6 + \gamma_5^j \omega_1 A_j, \\ \mathrm{d}A_6 &= -a\omega_1 A_4 + \omega_6^5 A_5 + \omega_6^6 A_6 + \gamma_6^j \omega_2 A_j, \\ \mathrm{d}A_i &= \gamma_6^j g_{ji}\omega_2 A_5 - \gamma_5^j g_{ji}\omega_1 A_6 + \omega_i^j A_j \\ & (i, j = 7, \ldots, 2n), \end{aligned}$$

dans lesquelles il faut supprimer, dans le cas de $n = 3$, les membres qui contiennent les points $A_7, \ldots, A_{2n}$ et de substituer à ω_1^2, ω_2^1, ω_3^4, ω_4^3, ω_5^6, ω_6^5 d'après (1.2).

Outre la congruence L, nous allons considérer une autre congruence non-parabolique L' qui se trouve plongée dans un espace symplectique Sp'_{2n-1}. La congruence L' soit déterminée par un système d'équations différentielles qui s'obtient de (2.1) en y désignant par un accent toutes les expressions relatives à L'.

Supposons que les droites des congruences L et L' se correspondent dans une correspondance développable C portant chaque surface développable de L dans une développable contenue dans L'. En posant

$$\tau_i^j = \omega'^j_i - \omega_i^j \quad (i, j = 1, \ldots, 2n) \tag{2.2}$$

on peut définir, sans restreindre la généralité, la correspondance envisagée C par les équations différentielles

$$\tau_1^3 = 0, \ \tau_2^4 = 0 \tag{2.3}$$

qui entraînent, d'après [2], les relations

$$\tau_1^1 = -\tau_2^2 = \tau_3^3 = -\tau_4^4. \tag{2.4}$$

En vue des recherches suivantes, considérons tout d'abord une transformation symplectique H entre les espaces Sp_{2n-1} et Sp'_{2n-1}, qui réalise un contact analytique du premier ordre des congruences L et L'. Il est démontré dans le mémoire [2] que, pour chaque couple de droites correspondantes des congruences L et L', ils existent des transformations symplectiques H jouissant des propriétés énoncées et que ces transformations tangentes à la correspondance C sont exprimées par les équations

$$\begin{gathered} HA_1 = \varrho A'_1, \ HA_2 = \varrho^{-1}A'_2, \ HA_3 = \varrho A'_3, \ HA_4 = \varrho^{-1}A'_4, \\ HA_i = a_i^j A'_j \quad (i, j = 5, \ldots, 2n), \end{gathered} \tag{2.5}$$

où ϱ est une fonction différente de zéro et les a_i^j satisfont aux relations

$$a_i^r a_j^s g_{rs} = g_{ij} \quad (i, j, r, s = 5, \ldots, 2n). \tag{2.6}$$

Maintenant, nous allons borner les transformations tangentes à C en démandant qu'elles réalisent un contact analytique du premier ordre des systèmes réglés engendrés par les droites $[A_3A_4]$ et $[A'_3A'_4]$.

On a, d'après (2.1),

$$\mathrm{d}[A_3A_4] \doteq -\omega_2[A_1A_4] + \omega_1[A_2A_3] + b\omega_2[A_3A_6] - a\omega_1[A_4A_5]$$

et il en résulte, en vertu de (2.5),

$$\begin{aligned} & H[A_3A_4] = [A'_3A'_4], \\ & H\,\mathrm{d}[A_3A_4] = \mathrm{d}[A'_3A'_4] + \varrho b\omega_2 a_6^j[A'_3A'_j] - b'\omega_2[A'_3A'_6] - \\ & \qquad - \varrho^{-1}a\omega_1 a_5^j[A'_4A'_j] + a'\omega_1[A'_4A'_5] \quad (j = 5, \ldots, 2n). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Les suppositions faites au sujet des transformations tangentes H entraînent donc les relations

$$(2.8)\quad aa_5^5 = \varrho a',\quad a_5^6 = 0,\quad a_5^j = 0,\quad a_6^5 = 0,\quad ba_6^6 = \varrho^{-1}b',\quad a_6^j = 0 \qquad (j = 7, \ldots, 2n),$$

les équations qui expriment a_5^j, a_6^j étant à supprimer si $n = 3$. En tenant compte de (2.6), on peut spécialiser les repères associés aux congruences L et L' de manière que

$$(2.9)\qquad a' = a,\quad b' = b.$$

Cela étant, les transformations symplectiques H qui réalisent un contact analytique du premier ordre des congruences L et L' et simultanément des systèmes réglés ($[A_3A_4]$) et ($[A_3'A_4']$) se trouvent déterminées, d'après (2.5), (2.8), (2.9), par les équations

$$(2.10)\quad \begin{aligned} &HA_1 = \varrho A_1',\ HA_2 = \varrho^{-1}A_2',\ HA_3 = \varrho A_3',\ HA_4 = \varrho^{-1}A_4',\\ &HA_5 = \varrho A_5',\ HA_6 = \varrho^{-1}A_6',\ HA_i = a_i^jA_j' \quad (i, j = 7, \ldots, 2n), \end{aligned}$$

le groupe d'équations écrites en dernier lieu étant a supprimer si $n = 3$. Pour abréger, nous appelerons la transformation tangente H qui jouit des propriétés mentionnées *transformation canonique* tangente à la correspondance C.

3. Au sens des recherches de E. Čech, nous introduirons les définitions suivantes:

Une correspondance développable C entre deux congruences L et L' s'appelle 1° *déformation ponctuelle,* 2° *deformation planaire,* 3° *déformation focale de première* resp. *seconde espèce,* 4° *déformation asymptoticale de première* resp. *seconde espèce,* si les congruences L et L' jouissent de la propriété d'avoir la même 1° forme ponctuelle, 2° forme planaire, 3° première resp. seconde forme focale, 4° première resp. seconde forme asymptoticale.

Dans ce qui suit, nous allons nous occuper des conditions nécessaires et suffisantes pour que les congruences L et L' en question soient en déformation d'un des types mentionnés. Pour cela, considérons les correspondances ponctuelles $A_1 \to A_1'$, $A_2 \to A_2'$, $A_3 \to A_3'$, $A_4 \to A_4'$ déterminées par la correspondance C entre les surfaces engendrées par les points en question.

On a, en vertu de (2.1) et (2.10), pour une transformation canonique tangente quelconque

$$(3.1)\quad \begin{aligned} &HA_1 = \varrho A_1', && H\,\mathrm{d}A_1 = \mathrm{d}(\varrho A_1') + (.)\,A_1' + (\varrho^{-1}\omega_1^2 - \varrho\omega_1'^2)\,A_2',\\ &HA_2 = \varrho^{-1}A_2', && H\,\mathrm{d}A_2 = \mathrm{d}(\varrho^{-1}A_2') + (.)\,A_2' + (\varrho\omega_2^1 - \varrho^{-1}\omega_2'^1)\,A_1',\\ &HA_3 = \varrho A_3', && H\,\mathrm{d}A_3 = \mathrm{d}(\varrho A_3') + (.)\,A_3' + (\varrho^{-1}\omega_3^4 - \varrho\omega_3'^4)\,A_4',\\ &HA_4 = \varrho^{-1}A_4', && H\,\mathrm{d}A_4 = \mathrm{d}(\varrho^{-1}A_4') + (.)\,A_4' + (\varrho\omega_4^3 - \varrho^{-1}\omega_4'^3)\,A_3'. \end{aligned}$$

Cela étant, on voit immédiatement que $\varphi = \varphi'$ si et seulement si les deux premières équations du système

$$(3.2) \qquad \omega'^2_1 = \varrho^{-2}\omega^2_1,\ \omega'^1_2 = \varrho^2\omega^1_2,\ \omega'^4_3 = \varrho^{-2}\omega^4_3,\ \omega'^3_4 = \varrho^2\omega^3_4$$

sont vraies et que les conditions nécessaires et suffisantes pour l'egalité des autres formes invariantes (1.9) peuvent être exprimées par les couples convenables de relations (3.2). Or, on a, d'après (3.1), $\varphi = \varphi'$ si et seulement si une transformation canonique tangente réalise un contact analytique du premier ordre entre les surfaces (A_1) et (A'_1), (A_2) et (A'_2). Comme les résultats analogues sont valables même pour l'égalité des autres formes (1.9), on peut caractériser les déformations signalées plus haut par les affirmations suivantes:

Une correspondance développable C entre les congruences L et L' est une 1° *déformation ponctuelle* ($\varphi = \varphi'$), 2° *déformation planaire* ($\psi = \psi'$), 3° *déformation focale de première espèce* ($f_1 = f'_1$) *resp. de seconde espèce* ($f_2 = f'_2$), 4° *déformation asymptoticale de première espèce* ($g_1 = g'_1$) *resp. de seconde espèce* ($g_2 = g'_2$), *si et seulement si, pour un couple quelconque de droites correspondantes de L et L', il existe au moins une transformation symplectique canonique, tangente à la correspondance C (c'est-à-dire une transformation tangente aux correspondances $[A_1A_2] \to [A'_1A'_2]$, $[A_3A_4] \to$ $\to [A'_3A'_4]$), qui est simultanément tangente aux correspondances* 1° $A_1 \to A'_1$, $A_2 \to A'_2$, 2° $A_3 \to A'_3$, $A_4 \to A'_4$, 3° $A_1 \to A'_1$, $A_4 \to A'_4$ *resp.* $A_2 \to A'_2$, $A_3 \to A'_3$, 4° $A_1 \to A'_1$, $A_3 \to A'_3$ *resp.* $A_2 \to A'_2$, $A_4 \to A'_4$.

Remarquons qu'il est possible de remplacer la surface (A_3) resp. (A_4) par la surface (A_1) resp. (A_2) considérée comme enveloppe des plans focaux $[A_1A_2A_3]$ resp. $[A_1A_2A_4]$. Cela permet de formuler les résultats précédents sous une forme qui ne diffère pas essentiellement des résultats relatifs aux congruences de droites dans des espaces projectifs à trois dimensions (v. [1]).

Nous décrirons encore une autre signification géométrique des déformations focales et asymptoticales.

On obtient de (1.5) par un calcul facile

$$\begin{aligned}(3.3)\quad \mathrm{d}[A_1A_3] &= (\omega^1_1 + \omega^3_3)\,[A_1A_3] + \omega^4_3[A_1A_4] + a\omega_1[A_1A_5] + \omega^2_1[A_2A_3],\\ \mathrm{d}[A_1A_4] &= -\omega_1[A_1A_2] + \omega^3_4[A_1A_3] + (\omega^1_1 + \omega^4_4)\,[A_1A_4] +\\ &\quad + b\omega_2[A_1A_6] + \omega^2_1[A_2A_4] + \omega_1[A_3A_4]\end{aligned}$$

de sorte que l'on a, d'après (2.9), pour une transformation canonique tangente H quelconque

$$\begin{aligned}(3.3)\quad H[A_1A_3] &= \varrho^2[A'_1A'_3],\quad H\mathrm{d}[A_1A_3] = \mathrm{d}(\varrho^2[A'_1A'_3]) + (.)\,[A'_1A'_3] +\\ &\quad + (\omega^4_3 - \varrho^2\omega'^4_3)\,[A'_1A'_4] + (\omega^2_1 - \varrho^2\omega'^2_1)\,[A'_2A'_3],\\ H[A_1A_4] &= [A'_1A'_4],\quad H\,\mathrm{d}[A_1A_4] = \mathrm{d}[A'_1A'_4] + (.)\,[A'_1A'_4] +\\ &\quad + (\varrho^2\omega^3_4 - \omega'^3_4)\,[A'_1A'_3] + (\varrho^{-2}\omega^2_1 - \omega'^2_1)\,[A'_2A'_4].\end{aligned}$$

Les relations précédentes (3.4), ainsi que les relations analogues pour les systèmes réglés engendrés par les droites $[A_2A_4]$ et $[A_2A_3]$ permettent donc d'énoncer les théorèmes suivants:

Une correspondance développable C entre les congruences L et L' est une 1° *déformation focale de première resp. seconde espèce,* 2° *déformation asymptoticale de première resp. seconde espèce, si et seulement si, pour un couple quelconque de droites correspondantes de L et L', il existe au moins une transformation symplectique canonique, tangente à la correspondance C, qui est simultanément tangente aux correspondances* 1° $[A_1A_4] \to [A_1'A_4']$ *resp.* $[A_2A_3] \to [A_2'A_3']$, 2° $[A_1A_3] \to [A_1'A_3']$ *resp.* $[A_2A_4] \to [A_2'A_4']$.

4. Il a été démontré dans notre mémoire antérieur [2] que les congruences L et L' se trouvent en déformation symplectique du second ordre si et seulement si l'on a (2.9) et s'il existe une fonction $\varrho \neq 0$ qui satisfait aux équations (3.2). On en obtient immédiatement le résultat suivant:

La condition nécessaire et suffisante pour la déformation symplectique du second ordre d'une congruence non-parabolique d'un espace symplectique à $2n - 1$ dimensions est l'invariance de son élément linéaire symplectique.

En comparant les conditions nécessaires et suffisantes pour les déformations introduites dans ce travail et celles pour la déformation symplectique on obtient l'affirmation qui suit:

Les congruences L et L' étant en déformation symplectique du second ordre, elles sont en même temps en déformation ponctuelle, en déformation planaire, en déformation focale de première et de seconde espèce et en déformation asymptoticale de première et de seconde espèce. Inversement, si les congruences L et L' sont en trois de ces six déformations, elles sont aussi en déformation symplectique du second ordre.

5. Les conditions analytiques pour les déformations étudiées consistent dans l'existence d'une fonction $\varrho \neq 0$ qui satisfait à un couple convenable de relations (3.2). Cherchons les conditions d'intégrabilité de ces deux relations et, pour cela, écrivons les différentielles extérieures des équations (3.2).

On obtient, en vertu de (2.4), les relations extérieures quadratiques que l'on peut ramener par un calcul facile à la forme

$$(5.1) \qquad \left[\omega_1^2\left(\frac{d\varrho}{\varrho}+\tau_1^1\right)\right]=0, \quad \left[\omega_2^1\left(\frac{d\varrho}{\varrho}+\tau_1^1\right)\right]=0,$$

$$\left[\omega_3^4\left(\frac{d\varrho}{\varrho}+\tau_1^1\right)\right]=0, \quad \left[\omega_4^3\left(\frac{d\varrho}{\varrho}+\tau_1^1\right)\right]=0.$$

Pour chacune des déformations en question, nous ne considérons dans ce qui suit que le cas général exprimé par la supposition

$$\frac{d\varrho}{\varrho} + \tau_1^1 \neq 0. \tag{5.2}$$

Rappelons que les courbes, qui se trouvent situées sur la surface focale (A_1) resp. (A_2) et appartiennent au complexe absolu K, sont déterminées par l'équation différentielle $\omega_1^2 = 0$ resp. $\omega_2^1 = 0$. Les courbes en question s'appellent, d'après [2], courbes complectiques des surfaces focales de la congruence L. On voit facilement de (2.1) en vertu de (1.2) que les tangentes des courbes $\omega_3^4 = 0$ resp. $\omega_4^3 = 0$ sur la surface (A_3) resp. (A_4) appartiennent aussi au complexe K. Les courbes mentionnées apparaissent ainsi comme courbes complectiques des surfaces en question. Cela étant, nous nous proposons de démontrer les résultats suivants:

Les congruences L, qui admettent la déformation 1° *ponctuelle,* 2° *planaire,* 3° *focale de première resp. seconde espèce,* 4° *asymptoticale de première resp. seconde espèce, jouissent dans le cas considéré de la propriété que les courbes complectiques situées sur les surfaces* 1° (A_1) *et* (A_2), 2° (A_3) *et* (A_4), 3° (A_1) *et* (A_4) *resp.* (A_2) *et* (A_3), 4° (A_1) *et* (A_3) *resp.* (A_2) *et* (A_4) *se correspondent, les unes aux autres, dans une correspondance ponctuelle qui se trouve déterminée entre les surfaces en question par la congruence L.*

La démonstration de la proposition précédente découle facilement de (5.1) et (5.2). En effet, les congruences L et L' étant, par example, en déformation ponctuelle, les relations écrites dans la première ligne de (5.1) ont lieu. On en déduit, en se basant sur (5.2), que $[\omega_1^2\omega_2^1] = 0$. Or, cette dépendance des formes ω_1^2, ω_2^1 entraîne que les courbes complectiques des surfaces focales (A_1) et (A_2) de la congruence L se correspondent mutuellement. La démonstration des affirmations relatives à une des autres déformations considérées est tout-à-fait analogue.

En terminant, nous allons prouver le théorème suivant qui concerne la question de la généralité et de l'existence des congruences admettant une des déformations envisagées:

Les congruences L qui admettent la déformation 1° *ponctuelle,* 2° *planaire,* 3° *focale de première resp. seconde espèce,* 4° *asymptoticale de première resp. seconde espèce existent et elles dépendent d'une fonction arbitraire de deux variables.*

Pour abréger, nous démontrerons le résultat précédent dans le cas de la déformation ponctuelle en laissant de côté la démonstration des affirmations résiduelles. D'après ce qui précède, on a, pour une congruence L qui admet la déformation ponctuelle, $[\omega_1^2\omega_2^1] = 0$ de sorte que les formes ω_1^2, ω_2^1 sont liées par une relation linéaire. Or, on vérifie facilement en vertu de (1.2) que cette relation a la forme

$$\alpha_0\omega_2^1 + \beta_1\omega_1^2 = 0. \tag{5.3}$$

La congruence L en question se trouve ainsi définie par le système d'équations différentielles (1.2), (1.4), l'équation qui exprime la forme ω_2^1 étant remplacée par la relation (5.3). Les conditions d'intégrabilité du système mentionné sont exprimées par les relations extérieures (1.5), (1.6), la relation qui se produit par la différentiation de l'équation exprimant la forme ω_2^1 dans (1.2) étant remplacée par la relation

$$[\omega_1^2, \alpha_0(\mathrm{d}\beta_1 + \beta_1 . \overline{\omega_1^1 - \omega_4^4}) - \beta_1(\mathrm{d}\alpha_0 + \alpha_0 . \overline{2\omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_4^4})] = 0$$

déduite par la différentiation extérieure de (5.3). Il en résulte que le systéme considéré est en involution et que sa solution la plus générale dépend d'une fonction arbitraire d'une variable.

LITÉRATURE

[1] Čech E., *Transformations développables des congruences des droites.* Czech. Math. Journal 8 (81), 1956, 260—286.

[2] Svoboda K., *Déformation symplectique des congruences de droites.* Arch. math. 1, 1965, 59—74.