

Syméon Bozpalides

Fibrations et faisceaux dans une 2-catégorie

Archivum Mathematicum, Vol. 12 (1976), No. 4, 199--208

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/106944>

Terms of use:

© Masaryk University, 1976

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

FIBRATIONS ET FAISCEAUX DANS UNE 2-CATÉGORIE

par SYMÉON BOZAPALIDES
 (Présenté le 4 Janvier 1976)

Dans ce papier on étudie d'une part les fibrations dans une 2-catégorie et on passe à ce cadre générale tous les résultats de Gray [4] et d'autre part les faisceaux sur un objet d'une 2-catégorie, ce qui nous permet de parler de l'objet de groupes, d'anneaux, de catégories internes, etc, d'un certain objet.

O. PRELIMINAIRES

a) Une 2-catégorie A est à cotenseurs si, pour chaque objet X de A et pour chaque petite catégorie I , le 2-foncteur

$$\text{Cat}(I, A(-, X)) : A^{\text{op}} \rightarrow \text{Cat}$$

est représentable; on note X^I un représentant. Pour exemples voir [3].

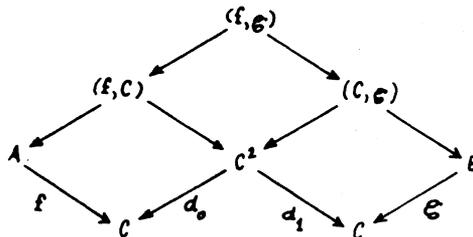
b) L'objet A d'une 2-catégorie A à cotenseurs est à limites projectives (resp. inductives) si pour chaque petite catégorie I , la flèche diagonale

$$\Delta : A \rightarrow A^I$$

admet un adjoint à droite (resp. à gauche).

Le lecteur pourrait trouver des détails dans [3].

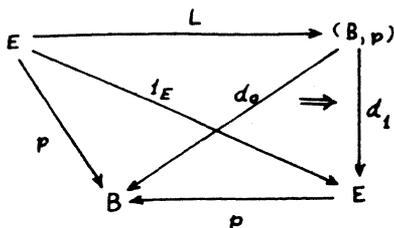
c) Étant donné deux flèches de même but $A \xrightarrow{b} C \xleftarrow{a} B$ dans une 2-catégorie A , on désigne par (f, g) l'objet déterminé par le diagramme ci-dessous, où tous les carrés sont des Cat-produits fibrés



Il est clair que pour tout objet X de \mathcal{A} la catégorie $\mathcal{A}(X, (f, g))$ est isomorphe à la catégorie comma $(\mathcal{A}(X, f), \mathcal{A}(X, g))$. On appelle (f, g) l'objet comma des f, g . On dit que \mathcal{A} est à objets commas si (f, g) existe pour tout couple de flèches coterminales.

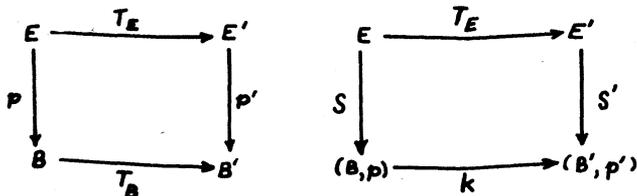
1. FIBRATIONS

Soient $p : E \rightarrow B$ une flèche d'une 2-catégorie à objets commas et $L : E \rightarrow (B, p)$ la seule flèche qui rend commutatif le diagramme

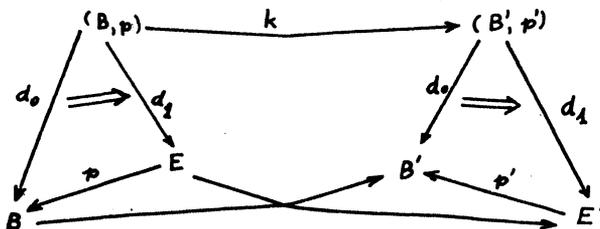


Définitions. 1) $p : E \rightarrow B$ est une *fibration* si L admet un adjoint à droite $S : (B, p) \rightarrow E$.

2) Un *morphisme cartésien* de p vers la fibration $p' : E' \rightarrow B'$ est un couple (T_E, T_B) de flèches $T_E : E \rightarrow E', T_B : B \rightarrow B'$, tels que les carrés suivants commutent



où k est la seule flèche qui fait commuter le diagramme



(I)

Exemples. 1°. Une fibration dans Cat est une fibration au sens usuel.

2°. $A = Cat(E)$, la 2-catégorie des catégories internes à E , où E est à limites projectives finies; alors $p : E \rightarrow B$ est une fibration dans $Cat(E)$ ssi pour tout $U \in Ob E$, $Hom(U, p) : Hom(U, E) \rightarrow Hom(U, B)$ est une fibration dans Cat , et $(Hom(f, E), Hom(f, B))$ est un morphisme cartésien. $\forall f \in Fl E$, où $Hom(U, E)$ désigne la catégorie $(Hom(U, E_0), Hom(U, E_i), Hom(U, d_0^E), Hom(U, d_1^E), Hom(U, m^E), Hom(U, n^E))$.

Proposition 1. i) $p : E \rightarrow B$ est une fibration dans la 2-catégorie A ssi pour tout objet X de A le foncteur $A(X, p) : A(X, E) \rightarrow A(X, B)$ l'est aussi, et les foncteurs $(A(g, E), A(g, B))$ sont cartésiens, $\forall g \in Fl A$;

ii) (T_E, T_B) est un morphisme cartésien ssi pour tout $X \in Ob A$ $(A(X, T_E), A(X, T_B))$ l'est aussi.

Pour démontrer la proposition ci-dessus on a besoin des lemmes suivants:

Lemme 2. Soient

$$X \begin{array}{c} \xleftarrow{f} \\ \xrightarrow{u} \end{array} Y$$

deux flèches dans une 2-catégorie B ; alors les conditions suivantes sont équivalentes:

i) $f \dashv u$ dans B ;

ii) a) pour tout objet A de B on a $B(A, f) \dashv B(A, u)$,

b) pour toute flèche $m : B \rightarrow A$ de B on a

$$B(m, X) \cdot \eta_A = \eta_B \cdot B(m, X),$$

où η_A, η_B sont les unités des adjonctions a ;

iii) a) pour tout objet A de B on a $B(A, f) \dashv B(A, u)$,

b) pour toute flèche $m : B \rightarrow A$ de B on a

$$B(m, Y) \cdot \varepsilon_A = \varepsilon_B \cdot B(m, Y),$$

où $\varepsilon_A, \varepsilon_B$ sont les counités des adjonctions a).

Preuve. i) \Rightarrow ii), iii) trivial.

ii) \Leftrightarrow iii), car on a le morphisme d'adjonctions [5]

$$\begin{array}{ccc} B(A, X) & \begin{array}{c} \xrightarrow{B(A, f)} \\ \xleftarrow{B(A, u)} \end{array} & B(A, Y) \\ \downarrow B(m, X) & & \downarrow B(m, Y) \\ B(B, X) & \begin{array}{c} \xrightarrow{B(B, f)} \\ \xleftarrow{B(B, u)} \end{array} & B(B, Y) \end{array}$$

ii), iii) \Rightarrow i).

De b) on obtient

$$\eta_A(x) \cdot m = \eta_B(x \cdot m), \quad x : A \rightarrow X,$$

donc

$$\eta_X(1_X) \cdot x = \eta_A(x), \quad x : A \rightarrow X,$$

où $\eta = \eta_X(1_X) : 1_X \Rightarrow u \cdot f$.

De même on définit

$$\varepsilon = \varepsilon_Y(1_Y) : f \cdot u \Rightarrow 1_Y$$

par $\varepsilon_A(y) = \varepsilon \cdot y$.

L'adjonction a) au point $x \in \text{Ob } \mathbf{B}$ donne

$$\varepsilon_x \cdot \mathbf{B}(X, f) \circ \mathbf{B}(X, f) \cdot \eta_x = \mathbf{B}(X, f),$$

d'où en évaluant en 1_x on trouve que

$$\varepsilon_x(f) \circ f \eta = f$$

et comme $\varepsilon_x(f) = \varepsilon f$, on obtient finalement

$$\varepsilon f \circ f \eta = f.$$

L'autre identité triangulaire se prouve pareillement. ■

Lemme 3. Soit $u : A \rightarrow B$ une flèche dans la 2-catégorie \mathbf{B} ; alors les conditions suivantes sont équivalentes:

- i) u admet un adjoint à gauche dans \mathbf{B} ;
- ii) a) pour tout objet X de \mathbf{B} le foncteur $\mathbf{B}(X, u)$ admet un adjoint à gauche noté F_X , de façon que les carrés

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{B}(X, \mathbf{B}) & \xrightarrow{F_X} & \mathbf{B}(X, A) \\
 \mathbf{B}(m, \mathbf{B}) \downarrow & & \downarrow \mathbf{B}(m, A) \\
 \mathbf{B}(Y, \mathbf{B}) & \xrightarrow{F_Y} & \mathbf{B}(Y, A)
 \end{array}$$

commutent, $\forall m \in \text{Fl } \mathbf{B}, m : Y \rightarrow X$,

b) on a

$$\mathbf{B}(m, \mathbf{B}) \cdot \eta_X = \eta_Y \cdot \mathbf{B}(m, \mathbf{B}),$$

où η_X, η_Y sont les unités des adjonctions a);

iii) a) la condition ii) a) est vérifiée ainsi que la relation

$$B(m, A) \cdot \varepsilon_X = \varepsilon_Y \cdot B(m, A),$$

où $\varepsilon_A, \varepsilon_B$ sont les counités des adjonctions ii) a).

Preuve. Tout revient à montrer que ii), iii) \Rightarrow i). Il est facile de voir que i) équivaut à la condition i') ci-après:

i') a) pour tout objet X de B le foncteur $B(X, u)$ admet un adjoint à gauche F_X , tel que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc}
 B(X, B) & \xrightarrow{F_X} & B(X, A) \\
 \left(\begin{array}{c} \Rightarrow \\ B(\varphi, B) \\ \Rightarrow \end{array} \right) & & \left(\begin{array}{c} \Rightarrow \\ B(\varphi, A) \\ \Rightarrow \end{array} \right) \\
 B(Y, B) & \xrightarrow{F_Y} & B(Y, A)
 \end{array} \quad (II)$$

(II)

commutent, $\forall \varphi : m \Rightarrow m' : Y \rightarrow X$;

b) $B(m, B) \cdot \eta_X = \eta_Y \cdot B(m, B), \forall m \in \text{Fl}B, m : Y \rightarrow X$.

Il est clair que i') \Rightarrow ii).

Pour montrer l'inverse il suffit de montrer que (II) est commutatif, ou bien que

$$(1) \quad F_X(x) \cdot \varphi = F_Y(x \cdot \varphi), \quad x : X \rightarrow B$$

Prenons

$$n_x : x \rightarrow u \cdot F_X(x);$$

en vertu de ii) b) on a

$$\eta_{xm} = \eta_x \cdot m : x \cdot m \rightarrow u \cdot F_X(x) \cdot m$$

$$\eta_{xm'} = \eta_x \cdot m' : x \cdot m' \rightarrow u \cdot F_X(x) \cdot m'$$

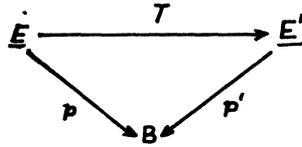
et

$$\begin{cases} F_Y(x \cdot m) = F_X(x) \cdot m \\ F_Y(x \cdot m') = F_X(x) \cdot m' \end{cases}$$

Par construction $F_Y(x \cdot \varphi)$ est la seule 2-cellule qui rend commutatif le carré

$$\begin{array}{ccc}
 x \cdot m & \xrightarrow{\eta_{x \cdot m}} & u \cdot F_X(x) \cdot m \\
 \downarrow x \cdot \varphi & & \downarrow u \cdot F_X(x) \cdot \varphi \\
 x \cdot m' & \xrightarrow{\eta_{x \cdot m'}} & u \cdot F_X(x) \cdot m'
 \end{array}$$

d'où (1). ■



Corrolaire 4. *Le morphisme cartésien*

est une fibration dans $Fib(B)$, la 2-catégorie des fibrations audessus de la catégorie B , ssi T en est une dans Cat .

Preuve. T est une fibration dans $Fib(B)$ ssi

$$T(B) = T|_{p^{-1}(B)} : p^{-1}(B) \rightarrow p'^{-1}(B)$$

est une fibration dans Cat , $\forall B \in ObB$, et si de plus les foncteurs image "inverse" sont cartésiens.

Cela veut dire d'après la prop. 4.6.[4], que T est une fibration dans Cat , d'où le résultat. ■

Corrolaire 5. *Pour tout objet A de B , la flèche $d_0 : A^2 \rightarrow A$ est une fibration dans B .*

Preuve. En vertu de la prop. 1. la flèche $d_0 : A^2 \rightarrow A$ est une fibration ssi pour tout $X \in ObB$, le foncteur

$$\begin{array}{ccccc} B(X, d_0) : B(X, A^2) & \rightarrow & B(X, A) & & \\ \wr \downarrow & & \wr \downarrow & & \parallel \\ d_0 & & B(X, A)^2 & & B(X, A) \end{array}$$

en est une dans Cat , et $B(g, A)$ est un morphisme cartésien, $\forall g \in FlB$, ce qui est toujours vrai (voir [4]). ■

Corrolaire 6. *Si $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ est une fibration dans $\mathcal{U}\text{-Cat}$, la 2-catégorie de catégories relatives à la catégorie monoidale \mathcal{U} , alors le foncteur sous-jacent $|P| : |\mathcal{A}| \rightarrow |\mathcal{B}|$ est une fibration dans Cat .*

Preuve. $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ fibration dans $\mathcal{U}\text{-Cat}$, entraine que

(2) $\mathcal{U}\text{-Cat}(I, P) : \mathcal{U}\text{-Cat}(I, \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{U}\text{-Cat}(I, \mathcal{B})$

est une fibration dans Cat , où I désigne la \mathcal{U} -catégorie triviale à un seul objet $*$, telle que $I(*, *) = I$, I étant l'objet neutre de la catégorie monoidale \mathcal{U} .

Mais (2) est exactement $|P| : |\mathcal{A}| \rightarrow |\mathcal{B}|$. ■

Corrolaire 7. *Dans une 2-catégorie B représentable, à Cat -limites projectives on a:*

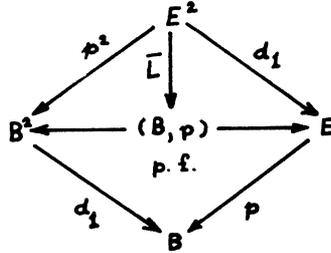
- i) *La composition des fibrations est une fibration.*

ii) L'image inverse d'une fibration en est une.

iii) $p : E \rightarrow B$ est une fibration ssi pour toute petite catégorie I $p' : E' \rightarrow B'$ l'est aussi.

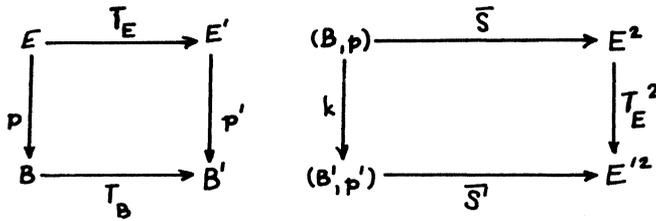
Preuve. i) et ii) sont évidents. En ce qui concerne iii) on utilise le cor. 3.7. de [4]. ■

Considérons le diagramme commutatif suivant



Proposition 8. i) p est une fibration ssi L admet un adjoint à droite $\bar{S} : (B, p) \rightarrow E^2$, tel que $L \cdot \bar{S} = 1_{(B, p)}$.

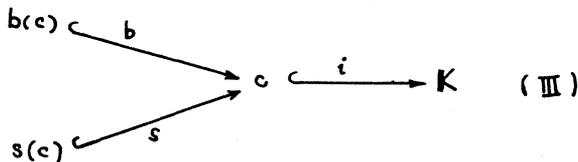
ii) (T_E, T_B) est un morphisme cartésien de p vers p' ssi les carrés



commutent, où k est défini par le diagramme (I).

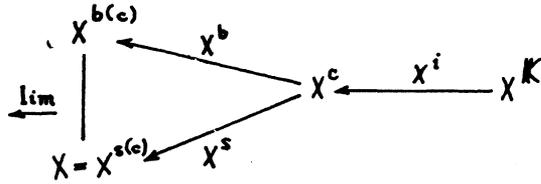
2. FAISCEAUX

La théorie que nous avons développé nous permet de construire l'objet de groupes, d'anneaux, de catégories internes, etc, sur un objet X à limites projectives, d'une 2-catégorie A à cotenseurs. Soit $\tilde{K} = (K, \Gamma)$ une catégorie protopologique [1], i. e. une catégorie K munie d'un ensemble des cônes projectifs Γ . On note $s(c)$ et $b(c)$ le sommet et la base du cône c respectivement. Du diagramme



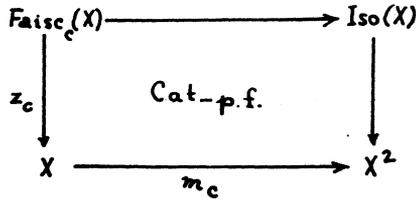
(III)

on obtient le diagramme



(où \lim désigne la flèche adjointe à droite de la diagonale $\Delta : X \rightarrow X^{b(c)}$) ainsi que une 2-cellule $m_c : X^s \cdot X^i \Rightarrow \lim \cdot X^b \cdot X^i : X^K \rightarrow X$.

On définit



où l'objet $\text{Iso}(X)$ est caractérisé par l'isomorphisme naturel

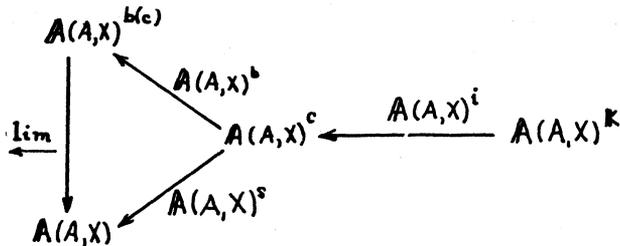
$$A(A, \text{Iso}(X)) \xrightarrow{\sim} \text{Iso } A(A, X),$$

et finalement l'objet $\text{Faisc}(\tilde{K}, X)$ s'obtient comme la Cat-limite projective des $z_c, \forall c \in \Gamma$.

Proposition 9. L'objet $\text{Faisc}(\tilde{K}, X)$ est caractérisé par l'isomorphisme naturel

$$A(A, \text{Faisc}(\tilde{K}, X)) \xrightarrow{\sim} \text{Faisc}(\tilde{K}, A(A, X)).$$

Preuve. Du diagramme (III) on obtient le diagramme



et la transformation naturelle

$$A(A, m_c) : A(A, X)^s \cdot A(A, X)^i \Rightarrow \lim \cdot A(A, X)^b \cdot A(A, X)^i : A(A, X)^K \rightarrow A(A, X).$$

Donc, étant donné que les Cat-limites projectives sont caractérisées par l'iso naturel

$$A(A, \lim_{\leftarrow} X_i) \xrightarrow{\sim} \lim_{\leftarrow} A(A, X_i),$$

on obtient finalement

$$A(A, \text{Faisc}(\tilde{\mathbf{K}}, X)) \xrightarrow{\sim} \text{Faisc}(\tilde{\mathbf{K}}, A(A, X)). \blacksquare$$

Corrolaire 10. $\text{Faisc}(\tilde{\mathbf{K}}, X^I) \xrightarrow{\sim} \text{Faisc}(\tilde{\mathbf{K}}, X)^I.$ ■

Proposition 11. Si l'objet X est à limites projectives, il en est de même de $\text{Faisc}(\tilde{\mathbf{K}}, X)$ et la flèche canonique

$$\text{Faisc}(\tilde{\mathbf{K}}, X) \rightarrow X^{\mathbf{K}}$$

commute avec ces limites (voir [3]).

Preuve. Pour tout A objet de \mathcal{A} , la catégorie

$$A(A, \text{Faisc}(\tilde{\mathbf{K}}, X))$$

qui, d'après la prop. 9. est isomorphe à la catégorie

$$\text{Faisc}(\tilde{\mathbf{K}}, A(A, X)),$$

est à limites projectives [1], donc la proposition résulte de la prop. 2, [3]. ■

Soit maintenant $F : (\mathbf{K}, \Gamma) \rightarrow (\mathcal{A}, \Delta)$ un morphisme de catégories prototopologiques, i. e. un foncteur $F : \mathbf{K} \rightarrow \mathcal{A}$ tel que $c \in \Gamma \Rightarrow Fc \in \Delta$; alors il existe une flèche unique, nommée *image inverse*.

$$F_X^* : \text{Faisc}(\tilde{\mathcal{A}}, X) \rightarrow \text{Faisc}(\tilde{\mathbf{K}}, X),$$

qui commute avec les limites projectives.

D'autre part toute flèche $f : X \rightarrow Y$ de \mathcal{A} commutant avec les limites projectives induit une seule flèche

$$f_*^X : \text{Faisc}(\tilde{\mathbf{K}}, X) \rightarrow \text{Faisc}(\tilde{\mathbf{K}}, Y),$$

nommée *image directe*, qui commute aussi avec les limites projectives.

Il est clair que F_X^*, f_*^X dépendent fonctoriellement de F et f respectivement.

REFERENCES

- [1] J. Bénabou: *Thèse*, Paris (1966).
- [2] J. Bénabou: *Catégories multiplicatives*, rapport n 27, Université de Louvain, (1972).
- [3] S. Bozpalides: *Objets à limites sur les bicatégories*, C. R. A. S. de Paris, à paraître.
- [4] J. W. Gray: *Fibered and cofibered categories*, La Jolla, Springer (1966).
- [5] S. Mac Lane: *Categories*, Spinger (1971).

S. Bozpalides
Département des Mathématiques
Université d'Ioannina
Ioannina
Grèce