Syméon Bozapalides

Fibrations et faisceaux dans une 2-catégorie

Archivum Mathematicum, Vol. 12 (1976), No. 4, 199--208

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/106944`

ARCH. MATH. 4, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS
XII: 199—208, 1976

FIBRATIONS ET FAISCEAUX DANS UNE 2-CATÉGORIE

par SYMÉON BOZAPALIDES

(Présenté le 4 Janvier 1976)

Dans ce papier on étudie d'une part les fibrations dans une 2-catégorie et on passe à ce cadre générale tous les résultas de Gray [4] et d'autre part les faisceaux sur un objet d'une 2-catégorie, ce qui nous permet de parler de l'objet de groupes, d'anneaux, de catégories internes, etc, d'un certain objet.

O. PRELIMINAIRES

a) Une 2-catégorie $\mathbf{A}$ *est à cotenseurs* si, pour chaque objet X de $\mathbf{A}$ et pour chaque petite catégorie $\mathbf{I}$, le 2-foncteur

$$\mathbf{Cat}\,(\mathbf{I}, \mathbf{A}(-, X)) : \mathbf{A}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Cat}$$

est représentable; on note $X^{\mathbf{I}}$ un représentant. Pour exemples voir [3].

b) L'objet A d'une 2-catégorie $\mathbf{A}$ à cotenseurs *est à limites projectives* (resp. *inductives*) si pour chaque petite catégorie $\mathbf{I}$, la flèche diagonale

$$\Delta : A \to A^{\mathbf{I}}$$

admet un adjoint à droite (resp. à gauche).
Le lecteur pourrait trouver des détails dans [3].

c) Étant donné deux flèches de même but $A \xrightarrow{b} C \xleftarrow{g} B$ dans une 2-catégorie $\mathbf{A}$, on désigne par (f, g) l'objet détérminé par le diagramme ci-dessous, où tous les carrés sont des Cat-produits fibrés

$$\begin{tikzcd}
 & & & (f,g) \arrow[dl] \arrow[dr] & & & \\
 & & (f,C) \arrow[dl] \arrow[dr] & & (C,g) \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
 & A \arrow[dr, "f"'] & & C^2 \arrow[dl, "d_0"] \arrow[dr, "d_1"'] & & B \arrow[dl, "g"] & \\
 & & C & & C & &
\end{tikzcd}$$

Il est clair que pour tout objet X de A la catégorie $A(X, (f, g))$ est isomorphe à la catégorie comma $(A(X,f), A(X, g))$. On appelle (f, g) l'objet comma des f, g. On dit que *A est à objets commas* si (f, g) existe pour tout couple de flèches coterminales.

1. FIBRATIONS

Soient $p : E \to B$ une flèche d'une 2-catégorie à objets commas et $L : E \to (B, p)$ la seule flèche qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "L"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "1_E"] & (B,p) \arrow[d, "d_1"] \arrow[dl, "d_0"'] \\ B & E \arrow[l, "p"] \end{tikzcd}$$

Définitions. 1) $p : E \to B$ est une *fibration* si L admet un adjoint à droite $S : (B, p) \to$ $\to E$.

2) Un *morphisme cartésien* de p vers la fibration $p' : E' \to B'$ est un couple (T_E, T_B) de flèches $T_E : E \to E'$, $T_B : B \to B'$, tels que les carrés suivants commutent

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T_E"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[d, "p'"] \\ B \arrow[r, "T_B"'] & B' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E \arrow[r, "T_E"] \arrow[d, "S"'] & E' \arrow[d, "S'"] \\ (B,p) \arrow[r, "k"'] & (B',p') \end{tikzcd}$$

où k est la seule flèche qui fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} (B,p) \arrow[rrr, "k"] \arrow[dd, "d_0"'] \arrow[dr, "d_1"] & & & (B',p') \arrow[dl, "d_0"'] \arrow[dd, "d_1"] \\ & E \arrow[dl, "p"'] \arrow[drr] & B' & \\ B \arrow[urr] \arrow[rrr] & & & E' \arrow[ul, "p'"] \end{tikzcd}$$

(I)

Exemples. 1°. Une fibration dans ***Cat*** est une fibration au sens usuel.
2°. $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Cat}(E)$, la 2-catégorie des catégories internes à E, où E est à limites projectives finies; alors $p : E \to B$ est une fibration dans $\boldsymbol{Cat}(E)$ ssi pour tout $U \in Ob\,E$, $\boldsymbol{Hom}(U, p)$: : $\boldsymbol{Hom}(U, E) \to \boldsymbol{Hom}(U, B)$ est une fibration dans $\boldsymbol{Cat}$, et $(\boldsymbol{Hom}(f, E), \boldsymbol{Hom}(f, B))$ est un morphisme cartésien. $\forall f \in Fl\ E$, où $\boldsymbol{Hom}(U, E)$ désigne la catégorie $(Hom(U, E_0), Hom(U, E_i), Hom(U, d_0^E), Hom(U, d_1^E), Hom(U, m^E), Hom(U, n^E))$.

Proposition 1. i) *$p : E \to B$ est une fibration dans la 2-catégorie $\boldsymbol{A}$ ssi pour tout objet X de $\boldsymbol{A}$ le foncteur $\boldsymbol{A}(X, p) : \boldsymbol{A}(X, E) \to \boldsymbol{A}(X, B)$ l'est aussi, et les foncteurs $(\boldsymbol{A}(g, E), \boldsymbol{A}(g, B))$ sont cartésiens, $\forall\, g \in Fl\,\boldsymbol{A}$;*
ii) *(T_E, T_B) est un morphisme cartésien ssi pour tout $X \in Ob\boldsymbol{A}$ $(\boldsymbol{A}(X, T_E), \boldsymbol{A}(X, T_B))$ l'est aussi.*
Pour démontrer la proposition ci-dessus on a besoin des lemmes suivants:

Lemme 2. Soient

$$X \underset{u}{\overset{f}{\leftrightarrows}} Y$$

deux flèches dans une 2-catégorie $\boldsymbol{B}$; alors les conditions suivantes sont équivalentes:

i) *$f \dashv u$ dans $\boldsymbol{B}$;*
ii) a) *pour tout objet A de $\boldsymbol{B}$ on a $\boldsymbol{B}(A, f) \dashv \boldsymbol{B}(A, u)$,*
b) *pour toute flèche $m : B \to A$* de $\boldsymbol{B}$ *on a*

$$\boldsymbol{B}(m, X) \,.\, \eta_A = \eta_B \,.\, \boldsymbol{B}(m, X),$$

où η_A, η_B sont les unités des adjonctions a);
iii) a) *pour tout objet A de $\boldsymbol{B}$ on a $\boldsymbol{B}(A, f) \dashv \boldsymbol{B}(A, u)$,*
b) *pour toute flèche $m : B \to A$ de $\boldsymbol{B}$ on a*

$$\boldsymbol{B}(m, Y) \,.\, \varepsilon_A = \varepsilon_B \,.\, \boldsymbol{B}(m, Y),$$

où ε_A, ε_B sont les counités des adjonctions a).

Preuve. i) $\Rightarrow$ ii), iii) trivial.
ii) $\Leftrightarrow$ iii), car on a le morphisme d'adjonctions [5]

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{B}(A,X) \arrow[r, shift left, "\mathbb{B}(A,f)"] \arrow[d, "\mathbb{B}(m,X)"'] & \mathbb{B}(A,Y) \arrow[l, shift left, "\mathbb{B}(A,u)"] \arrow[d, "\mathbb{B}(m,Y)"] \\
\mathbb{B}(B,X) \arrow[r, shift left, "\mathbb{B}(B,f)"] & \mathbb{B}(B,Y) \arrow[l, shift left, "\cdot\mathbb{B}(B,u)"]
\end{tikzcd}$$

ii), iii) $\Rightarrow$ i).

De b) on obtient

$$\eta_A(x) \,.\, m = \eta_B(x \,.\, m), \qquad x : A \to X,$$

donc

$$\eta_X(1_X) \,.\, x = \eta_A(x), \qquad x : A \to X,$$

où $\eta = \eta_X(1_X) : 1_X \Rightarrow u \,.\, f$.
De même on définit

$$\varepsilon = \varepsilon_Y(1_Y) : f \,.\, u \Rightarrow 1_Y$$

par $\varepsilon_A(y) = \varepsilon \,.\, y$.
L'adjonction a) au point $x \in \boldsymbol{ObB}$ donne

$$\varepsilon_X \,.\, \boldsymbol{B}(X,f) \circ \boldsymbol{B}(X,f) \,.\, \eta_X = \boldsymbol{B}(X,f),$$

d'où en évaluant en 1_X on trouve que

$$\varepsilon_X(f) \circ f\eta = f$$

et comme $\varepsilon_X(f) = \varepsilon f$, on obtient finalement

$$\varepsilon f \circ f\eta = f.$$

L'autre identité triangulaire se prouve pareillement. ∎

Lemme 3. *Soit $u : A \to B$ une flèche dans la 2-catégorie $\boldsymbol{B}$; alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) *u admet un adjoint à gauche dans $\boldsymbol{B}$;*

ii) *a) pour tout objet X de $\boldsymbol{B}$ le foncteur $\boldsymbol{B}(X, u)$ admet un adjoint à gauche noté F_X, de façon que les carrés*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{B}(X,B) \arrow[r, "F_X"] \arrow[d, "\mathbf{B}(m,B)"'] & \mathbf{B}(X,A) \arrow[d, "\mathbf{B}(m,A)"] \\
\mathbf{B}(Y,B) \arrow[r, "F_Y"] & \mathbf{B}(Y,A)
\end{tikzcd}$$

commutent, $\forall\, m \in \boldsymbol{FlB}$, $m : Y \to X$,

b) on a

$$\boldsymbol{B}(m, B) \,.\, \eta_X = \eta_Y \,.\, \boldsymbol{B}(m, B),$$

où η_X, η_Y sont les unités des adjonctions a);

iii) *a) la condition* ii) *a) est vérifiée ainsi que la relation*

$$\boldsymbol{B}(m, A) \,.\, \varepsilon_X = \varepsilon_Y \,.\, \boldsymbol{B}(m, A),$$

où ε_A, ε_B *sont les counités des adjonctions* ii) *a).*

Preuve. Tout revient à montrer que ii), iii) $\Rightarrow$ i). Il est facile de voir que i) équivaut à la condition i') ci-après:

i') a) pour tout objet X de $\boldsymbol{B}$ le foncteur $\boldsymbol{B}(X, u)$ admet un adjoint à gauche F_X, tel que les diagrammes

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\mathbf{B}(X,B) \arrow[r, "F_X"] \arrow[d, shift right=4ex] \arrow[d, shift left=4ex] \arrow[d, phantom, "\Rightarrow\ \mathbf{B}(\varphi,B)"] & \mathbf{B}(X,A) \arrow[d, shift right=4ex] \arrow[d, shift left=4ex] \arrow[d, phantom, "\Rightarrow\ \mathbf{B}(\varphi,A)"] \\
\mathbf{B}(Y,B) \arrow[r, "F_Y"] & \mathbf{B}(Y,A)
\end{tikzcd} \qquad (\mathrm{II})$$

(II)

commutent, $\forall \varphi : m \Rightarrow m' : Y \to X$;

b) $\boldsymbol{B}(m, B) \,.\, \eta_X = \eta_Y \,.\, \boldsymbol{B}(m, B), \forall m \in Fl\boldsymbol{B},\ m : Y \to X.$

Il est clair que i') $\Rightarrow$ ii).

Pour montrer l'inverse il suffit de montrer que (II) est commutatif, ou bien que

(1) $$F_X(x) \,.\, \varphi = F_Y(x \,.\, \varphi), \qquad x : X \to B$$

Prenons

$$n_x : x \to u \,.\, F_X(x);$$

en vertu de ii) b) on a

$$\eta_{xm} = \eta_x \,.\, m : x \,.\, m \to u \,.\, F_X(x) \,.\, m$$
$$\eta_{xm'} = \eta_x \,.\, m : x \,.\, m' \to u \,.\, F_X(x) \,.\, m'$$

et

$$\begin{cases} F_Y(x \,.\, m) = F_X(x) \,.\, m \\ F_Y(x \,.\, m') = F_X(x) \,.\, m'. \end{cases}$$

Par construction $F_Y(x \,.\, \varphi)$ est la seule 2-cellule qui rend commutatif le carré

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
x\cdot m \arrow[r, "\eta_{x\cdot m}"] \arrow[d, "x\cdot\varphi"'] & u\cdot F_X(x)\cdot m \arrow[d, "u\cdot F_X(x)\cdot\varphi"] \\
x\cdot m' \arrow[r, "\eta_{x\cdot m'}"'] & u\cdot F_X(x)\cdot m'
\end{tikzcd}$$

d'où (1). ∎

$$\begin{tikzcd} \underline{E} \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "p"'] & & \underline{E}' \arrow[dl, "p'"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Corrolaire 4. *Le morphisme cartésien*

est une fibration dans ***Fib*** *(**B**), la 2-catégorie des fibrations audessus de la catégorie **B**, ssi T en est une dans* ***Cat****.*

Preuve. T est une fibration dans ***Fib*** (***B***) ssi

$$T(B) = T/p^{-1}(B) : p^{-1}(B) \to p'^{-1}(B)$$

est une fibration dans ***Cat***, $\forall B \in \boldsymbol{ObB}$, et si de plus les foncteurs image "inverse" sont cartésiens.

Cela veut dire d'après la prop. 4.6.[4], que T est une fibration dans ***Cat***, d'où le résultat. ∎

Corrolaire 5. *Pour tout objet A de **B**, la flèche $d_0 : A^2 \to A$ est une fibration dans **B**.*

Preuve. En vertu de la prop. 1. la flèche $d_0 : A^2 \to A$ est une fibration ssi pour tout $X \in \boldsymbol{ObB}$, le foncteur

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{B}(X, d_0) : & \boldsymbol{B}(X, A^2) \to & \boldsymbol{B}(X, A) \\ \wr\| & \wr\| & \| \\ d_0 & \boldsymbol{B}(X, A)^2 & \boldsymbol{B}(X, A) \end{array}$$

en est une dans ***Cat***, et $\boldsymbol{B}(g, A)$ est un morphisme cartésien, $\forall g \in \boldsymbol{FlB}$, ce qui es toujours vrai (voir [4]). ∎

Corrolaire 6. *Si $P : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ est une fibration dans $\mathscr{U}$-**Cat**, la 2-catégorie de catégories relatives à la catégorie monoidale $\mathscr{U}$, alors le foncteur sous-jacent $|P| : |\mathscr{A}| \to |\mathscr{B}|$ est une fibration dans **Cat**.*

Preuve. $P : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ fibration dans $\mathscr{U}$-***Cat***, entraine que

$$\mathscr{U}\text{-}\boldsymbol{Cat}(I, P) : \mathscr{U}\text{-}\boldsymbol{Cat}(I, \mathscr{A}) \to \mathscr{U}\text{-}\boldsymbol{Cat}(I, \mathscr{B}) \tag{2}$$

est une fibration dans ***Cat***, où I désigne la $\mathscr{U}$-catégorie triviale à un seul objet $*$, telle que $I(*, *) = I$, I étant l'objet neutre de la catégorie monoidale $\mathscr{U}$.

Mais (2) est exactement $|P| : |\mathscr{A}| \to |\mathscr{B}|$. ∎

Corrolaire 7. *Dans une 2-catégorie **B** représentable, à Cat-limites projectives on a:*

i) *La composition des fibrations est une fibration.*

ii) *L'image inverse d'une fibration en est une.*

iii) $p : E \to B$ *est une fibration ssi pour toute petite catégorie* I $p^I : E^I \to B^I$ *l'est aussi.*

Preuve. i) et ii) sont évidents. En ce qui concerne iii) on utilise le cor. 3.7. de [4]. ∎

Considerons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
 & E^2 \arrow[dl, "p^2"'] \arrow[d, "\bar{L}"] \arrow[dr, "d_1"] & \\
B^2 \arrow[dr, "d_1"'] & \underset{\text{p.f.}}{(B,p)} \arrow[l] \arrow[r] & E \arrow[dl, "p"] \\
 & B &
\end{tikzcd}$$

Proposition 8. i) *p est une fibration ssi $\bar{L}$ admet un adjoint à droite $\bar{S} : (B, p) \to E^2$, tel que $\bar{L} . \bar{S} = 1_{(B,p)}$.*

ii) (T_E, T_B) *est un morphisme cartésien de p vers p' ssi les carrés*

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "T_E"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[d, "p'"] \\
B \arrow[r, "T_B"'] & B'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(B,p) \arrow[r, "\bar{S}"] \arrow[d, "k"'] & E^2 \arrow[d, "T_E^2"] \\
(B',p') \arrow[r, "\bar{S}'"'] & E'^2
\end{tikzcd}$$

ocmmutent, où k est défini par le diagramme (I).

2. FAISCEAUX

La théorie que nous avons dévellopé nous permet de construire l'objet de groupes, d'anneaux, de catégories internes, etc, sur un objet X à limites projectives, d'une 2-catégorie A à cotenseurs. Soit $\tilde{K} = (K, \Gamma)$ une catégorie protopologique [1], i. e. une catégorie K munie d'un ensemble des cônes projectifs Γ. On note $s(c)$ et $b(c)$ le sommet et la base du cône c respectivement. Du diagramme

$$\begin{tikzcd}
b(c) \arrow[dr, hook, "b"] & & \\
 & c \arrow[r, hook, "i"] & K \\
s(c) \arrow[ur, hook, "s"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad (\mathrm{III})$$

(III)

on obtient le diagramme

$$\begin{tikzcd}
X^{b(c)} \arrow[dd, dash, "\underleftarrow{\lim}"'] & & \\
& X^{c} \arrow[ul, "X^{b}"'] \arrow[dl, "X^{s}"] & X^{K} \arrow[l, "X^{i}"'] \\
X = X^{s(c)} & &
\end{tikzcd}$$

(où $\underleftarrow{\lim}$ désigne la flèche adjointe à droite de la diagonale $\Delta : X \to X^{b(c)}$) ainsi que une 2-cellule $m_c : X^s . X^i \Rightarrow \underleftarrow{\lim} . X^b . X^i : X^K \to X$.

On définit

$$\begin{tikzcd}
Faisc_c(X) \arrow[r] \arrow[d, "z_c"'] \arrow[dr, phantom, "\text{Cat-p.f.}"] & Iso(X) \arrow[d] \\
X \arrow[r, "m_c"'] & X^2
\end{tikzcd}$$

où l'objet $Iso(X)$ est caractérisé par l'isomorphisme naturel

$$A(A, Iso(X)) \xrightarrow{\sim} Iso\ A(A, X),$$

et finalement l'objet $Faisc\ (\tilde{K}, X)$ s'obtient comme la Cat-limite projective des $z_c, \forall c \in \Gamma$.

Proposition 9. *L'objet Faisc* $(\tilde{K}, X)$ *est caractérisé par l'isomorphisme naturel*

$$A(A, Faisc\ (\tilde{K}, X)) \xrightarrow{\sim} Faisc\ (\tilde{K}, A(A, X)).$$

Preuve. Du diagramme (III) on obtient le diagramme

$$\begin{tikzcd}
A(A,X)^{b(c)} \arrow[dd, "\underleftarrow{\lim}"'] & & \\
& A(A,X)^{c} \arrow[ul, "A(A,X)^{b}"'] \arrow[dl, "A(A,X)^{s}"] & A(A,X)^{K} \arrow[l, "A(A,X)^{i}"'] \\
A(A,X) & &
\end{tikzcd}$$

et la transformation naturelle

$$A(A, m_c) : A(A, X)^s . A(A, X)^i \Rightarrow \underleftarrow{\lim} . A(A, X)^b . A(A, X)^i : A(A, X)^K \to A(A, X).$$

Donc, étant donné que les Cat-limites projectives sont caractérisées par l'iso naturel

$$\mathbf{A}(A, \varprojlim X_i) \xrightarrow{\sim} \lim \mathbf{A}(A, X_i),$$

on obtient finalement

$$\mathbf{A}(A, \mathit{Faisc}\,(\tilde{\boldsymbol{K}}, X)) \xrightarrow{\sim} \mathit{Faisc}\,(\tilde{\boldsymbol{K}}, \mathbf{A}(A, X)). \blacksquare$$

Corrolaire 10. $\mathit{Faisc}\,(\tilde{\boldsymbol{K}}, X^{\boldsymbol{I}}) \xrightarrow{\sim} \mathit{Faisc}\,(\tilde{\boldsymbol{K}}, X)^{\boldsymbol{I}}$. $\blacksquare$

Proposition 11. *Si l'objet X est* à *limites projectives, il en est de même de Faisc* $(\tilde{\boldsymbol{K}}, X)$ *et la flèche canonique*

$$\mathit{Faisc}\,(\tilde{\boldsymbol{K}}, X) \to X^{\boldsymbol{K}}$$

commute avec ces limites (*voir* [3]).

Preuve. Pour tout A objet de $\mathbf{A}$, la catégorie

$$\mathbf{A}(A, \mathit{Faisc}\,(\tilde{\boldsymbol{K}}, X))$$

qui, d'après la prop. 9. est isomorphe à la catégorie

$$\mathit{Faisc}\,(\tilde{\boldsymbol{K}}, \mathbf{A}(A, X)),$$

est à limites projectives [1], donc la proposition résulte de la prop, 2, [3]. $\blacksquare$

Soit maintenant $F : (\boldsymbol{K}, \Gamma) \to (\Lambda, \Delta)$ un morphisme de catégories protopologiques, i. e. un foncteur $F : \boldsymbol{K} \to \Lambda$ tel que $c \in \Gamma \Rightarrow Fc \in \Delta$; alors il existe une flèche unique, nommée *image inverse*.

$$F_X^* : \mathit{Faisc}\,(\tilde{\Lambda}, X) \to \mathit{Faisc}\,(\tilde{\boldsymbol{K}}, X),$$

qui commute avec les limites projectives.
D'autre part toute flèche $f : X \to Y$ de $\mathbf{A}$ commutant avec les limites projectives induit une seule flèche

$$f_*^X : \mathit{Faisc}\,(\tilde{\boldsymbol{K}}, X) \to \mathit{Faisc}\,(\tilde{\boldsymbol{K}}, Y),$$

nommée *image directe*, qui commute aussi avec les limites projectives.
Il est clair que F_X^*, f_*^X dépendent fonctoriellement de F et f respectivement.

REFERENCES

[1] J. Bénabou: *Thèse,* Paris (1966).
[2] J. Bénabou: *Catégories multiplicatives,* rapport n 27, Université de Louvain, (1972).
[3] S. Bozapalides: *Objets à limites sur les bicatégories,* C. R. A. S. de Paris, *à* paraitre.
[4] J. W. Gray: *Fibered and cofibered categories,* La Jolla, Springer (1966).
[5] S. Mac Lane: *Categories,* Spinger (1971).

S. Bozapalides
Département des Mathématiques
Université d'Ioannina
Ioannina
Grèce