Bohdan Zelinka

Rozklad grafu na isomorfní podgrafy

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 90 (1965), No. 2, 147--152

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108266

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 90 (1965), Praha

ROZKLAD GRAFU NA ISOMORFNÍ PODGRAFY

BOHDAN ZELINKA, Liberec

(Došlo 11. září 1963)

V tomto článku je popsána konstrukce grafu, jejž lze rozložit na dva navzájem isomorfní podgrafy, a speciální případ rozkladu úplného grafu na čtyři navzájem isomorfní podgrafy.

1.

V tomto paragrafu popíšeme rozklad konečného grafu G na dva navzájem isomorfní podgrafy, z nichž každý obsahuje všechny uzly grafu G a které nemají žádnou společnou hranu. Graf, který lze takto rozložit, budeme nazývat R_2-grafem. Případem úplného grafu se zabývají práce [1], [2] a [3].

Množinu uzlů grafu G budeme označovat U, množinu jeho hran H. Isomorfní podgrafy, na něž graf G rozkládáme, označíme G_1 a G_2, jejich množiny hran po řadě H_1 a H_2. Doplněk grafu G označíme $\bar{G}$, jeho množinu hran $\bar{H}$. (Doplněk grafu G je graf, který obsahuje tutéž množinu uzlů jako graf G a právě ty hrany, které nejsou obsaženy v G.) Isomorfní zobrazení grafu G_1 na G_2 označíme f. Budeme uvažovat takové f, které je současně automorfismem G. Zobrazení f indukuje určitou permutaci p množiny U. O cyklech této permutace si vyslovíme několik lemmat.

Lemma 1. *Má-li cyklus $\mathscr{C}$ permutace p lichý počet uzlů, pak každé dva uzly z tohoto cyklu jsou spojeny hranou z $\bar{H}$.*

Důkaz. Označme uzly cyklu $\mathscr{C}$ po řadě $u_1, u_2, \ldots, u_k$, kde k je liché číslo a $u_1 = f(u_k)$, $u_{i+1} = f(u_i)$ pro $i = 1, \ldots, k - 1$. Nechť některá dvojice uzlů je spojena hranou z H, předpokládejme bez újmy na obecnosti, že je to dvojice $\{u_1, u_l\}$, kde $1 < l \leqq k$. Protože $H_1 \cup H_2 = H$, $H_1 \cap H_2 = \emptyset$, patří hrana u_1u_l buď do H_1, nebo do H_2. Předpokládejme bez újmy na obecnosti, že patří do H_1. Potom však (bereme-li indexy uzlů modulo k) je $u_2u_{l+1} \in H_2, \ldots, u_ku_{l-1} \in H_1$ (protože k je liché), $u_1u_l \in H_2$, což je spor s předpokladem.

Lemma 2. *Má-li každý z cyklů $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2$ permutace p lichý počet uzlů, pak žádný uzel cyklu $\mathscr{C}_1$ není spojen s žádným uzlem cyklu $\mathscr{C}_2$ hranou z H.*

Důkaz. Nechť se cyklus $\mathscr{C}_1$ skládá z uzlů $u_1, \ldots, u_k$, cyklus $\mathscr{C}_2$ z uzlů $v_1, \ldots, v_l$; $u_1 = f(u_k)$, $u_{i+1} = f(u_i)$ pro $i = 1, \ldots, k - 1$; $v_1 = f(v_l)$, $v_{j+1} = f(v_j)$ pro $j =$

$= 1, \ldots, l - 1$. Nechť m je nejmenší společný násobek čísel k, l; je to zřejmě také liché číslo. Nechť $u_1 v_1 \in H_1$, pak $f^q(u_1 v_1)$ patří do H_1 pro q sudé a do H_2 pro q liché. Tedy $f^m(u_1 v_1) \in H_2$. Avšak zřejmě $f^m(u_1) = u_1$, $f^m(v_1) = v_1$, tedy $f^m(u_1 v_1) = u_1 v_1$. To však je spor s předpokladem $u_1 v_1 \in H_1$.

Lemma 3. *Nechť počet cyklu $\mathscr{C}$ permutace p je $2q$, kde q je liché číslo. Nechť jeho uzly jsou označeny jako v lemmatu 1. Pak $u_i u_{i+q} \in \bar{H}$ pro $i = 1, \ldots, 2q$ (bereme-li indexy uzlů modulo $2q$).*

Důkaz. Jestliže by bylo $u_i u_{i+q} \in H$, pak by bylo buď $u_i u_{i+q} \in H_1$, nebo $u_i u_{i+q} \in H_2$. Nechť je bez újmy na obecnosti $u_i u_{i+q} \in H_1$. Pak $f^q(u_i u_{i+q}) \in H_2$, protože q je liché (viz důkaz lemmatu 2). Avšak $f^q(u_i) = u_{i+q}$, $f^q(u_{i+q}) = u_i$, tedy $f^q(u_i u_{i+q}) = u_i u_{i+q}$. Docházíme tedy ke sporu s předpokladem $u_i u_{i+q} \in H_1$.

Speciálním případem lemmatu 2 je tvrzení:

Dva různé samodružné uzly zobrazení f jsou vždy spojeny hranou z $\bar{H}$.

Samodružný uzel tu vlastně tvoří cyklus o jediném prvku.

Lemma 4. *Budiž $\hat{p}$ permutace množiny $\hat{U}$ neuspořádaných dvojic uzlů z U indukovaná permutací p množiny U; budiž $\hat{\mathscr{C}}$ libovolný její cyklus. Obsahuje-li $\hat{\mathscr{C}}$ dvojici uzlů z U, která nepatří mezi dvojice popsané v předešlých lemmatech, pak $\hat{\mathscr{C}}$ obsahuje sudý počet prvků.*

Důkaz. Budiž $\{u, v\}$ dvojice uzlů z U, která nepatří mezi dvojice popsané v předešlých lemmatech. Budiž q nejmenší přirozené číslo takové, že $\hat{p}^q(\{u, v\}) = \{u, v\}$. Znamená to, že buď $p^q(u) = u$, $p^q(v) = v$, nebo $p^q(u) = v$, $p^q(v) = u$. Druhý případ může nastat pouze tehdy, jestliže u a v náležejí témuž cyklu permutace p o $2q$ prvcích. Kdyby bylo q liché, nastal by případ popsaný v lemmatu 3, což je vyloučeno; tedy q je sudé. Zbývá první případ. Poněvadž $\{u, v\}$ nepatří mezi dvojice popsané v lemmatech 1 a 2, alespoň jeden z uzlů u, v patří do cyklu permutace p o sudém počtu r_1 prvků; druhý nechť patří do cyklu o r_2 prvcích. Zřejmě q je nejmenším společným násobkem čísel r_1 a r_2, tudíž je sudé.

Mějme dánu množinu uzlů U a na ní permutaci p. Popíšeme konstrukci, kterou budeme nazývat konstrukcí (K).

Spojíme hranou z $\bar{H}$ dvojice uzlů popsané v lemmatech 1, 2 a 3. Libovolnou další dvojici $\{u, v\}$ pak spojíme hranou z libovolné z množin H_1, H_2, $\bar{H}$. Je-li $uv \in H_1$ (resp. $uv \in H_2$), je $f^q(uv) \in H_2$ (resp. $f^q(uv) \in H_1$) pro q liché, $f^q(uv) \in H_1$ (resp. $f^q(uv) \in H_2$) pro q sudé. Pro $uv \in \bar{H}$ je $f^q(uv) \in \bar{H}$ pro každé q. Spojíme tedy všechny takovéto dvojice patřičnými hranami. Pak vybereme opět jednu dvojici z dvojic dosud nespojených a pokračujeme stejným způsobem tak dlouho, dokud není o každé dvojici rozhodnuto, jakou hranou má být spojena.

Přímým důsledkem lemmatu 4 je tato věta.

Věta 1. *Konstrukcí* (K) *vznikne vždy* R_2*-graf s množinou uzlů U a příslušným isomorfismem indukujícím permutaci p.*

Je zřejmé, že rovněž každý takovýto R_2-graf lze sestrojit konstrukcí (K).

Věta 2. *Jsou-li dána přirozená čísla m, n a m je sudé, $m \leqq n/2(n-1)$, existuje R_2-graf o n uzlech a m hranách.*

Důkaz. Budiž $n = 4k$ nebo $n = 4k + 1$, kde k je přirozené číslo. Sestrojíme graf G' o n uzlech isomorfní s jeho doplňkem tak, aby permutace indukovaná příslušným isomorfním zobrazením f' na množině uzlů měla pouze cykly o čtyřech nebo jednom prvku (viz [3]). Pak v permutaci indukované tímto zobrazením na množině hran tvoří hrany spojující uzel s obrazem jeho obrazu involutorní dvojice a všechny ostatní hrany tvoří cykly o čtyřech prvcích. Budiž $m' = n/2(n-1) - m$. Je to zřejmě číslo sudé. Je-li m' dělitelno čtyřmi, odstraníme z grafu $\langle n \rangle$, to jest úplného grafu o n uzlech, sjednocení G' a $\bar{G}'$, $m'/4$ takovýchto cyklů (je-li takovýchto cyklů méně než $m'/4$, odstraníme všechny tyto cykly a navíc ještě několik involutorních dvojic tak, abychom celkem odstranili m' hran). Není-li m' dělitelno čtyřmi, odstraníme $1/4(m'-2)$ takovýchto cyklů a jednu involutorní dvojici (případně opět všechny cykly o čtyřech prvcích a ještě několik involutorních dvojic). Výsledný graf G je hledaným grafem a grafy $G_1 = G \cap G'$, $G_2 = G \cap \bar{G}'$ jsou navzájem isomorfní, nemají společné hrany a jejich sjednocením je graf G. Nechť nyní $n = 4k + 2$ (resp. $n = 4k + 3$) a nechť m'' je přirozené číslo dělitelné čtyřmi takové, že $m'' \leqq 2(n-2)$, $m - m'' \leqq 1/2(n-2)(n-3)$. Pak sestrojíme graf ze $4k$ (resp. $4k + 1$) uzlů a $m - m''$ hran výše popsaným způsobem. K tomuto grafu připojíme dva uzly w_1 a w_2. Uzel w_1 spojíme s libovolným uzlem, který není samodružný, uzel w_2 s jeho obrazem, uzel w_1 opět s obrazem tohoto obrazu a tak dále, až vyčerpáme celý cyklus permutace. Pak opět spojíme w_1 s libovolným uzlem, který není samodružný, náleží do původního grafu a není dosud spojen s w_1 ani s w_2 a postup opakujeme. Tak pokračujeme tak dlouho, až celkový počet hran spojujících uzly w_1 a w_2 s uzly původního grafu dosáhne m''. Vyčerpáme-li do té doby všechny uzly, které nejsou samodružné, spojíme ještě oba uzly w_1, w_2 se samodružným uzlem (to se týká pouze případu $n = 4k + 3$). Výsledný graf je R_2-grafem, příslušný isomorfismus f je rozšířením isomorfismu grafu původně sestrojeného (bez w_1 a w_2) a je $f(w_1) = w_2$, $f(w_2) = w_1$, uzly w_1 a w_2 tedy tvoří involutorní dvojici.

2.

V tomto paragrafu si všimneme R_2-grafů isomorfních s jejich doplňkem. Budiž G R_2-graf isomorfní se svým doplňkem. Budiž f isomorfní zobrazení rozkládající G na dva isomorfní podgrafy, g isomorfní zobrazení G na $\bar{G}$. Každý cyklus permutace množiny U indukované zobrazením g se buď skládá z jediného uzlu, nebo je počet jeho uzlů dělitelný čtyřmi. Přitom cyklus sestávající z jediného uzlu může být nejvýše jeden.

Grafy G_1, G_2, $g(G_1)$, $g(G_2)$ vlastně tvoří rozklad úplného grafu na čtyři navzájem isomorfní podgrafy bez společných hran. (Tím není ovšem řečeno, že by se všechny takovéto rozklady úplného grafu daly vyjádřit tímto způsobem, zde jde vlastně jen o speciální případ.) Snadno dokážeme tedy větu.

Věta 3. *R_2-graf G isomorfní se svým doplňkem obsahuje $8k$ nebo $8k + 1$ uzlů, kde k je přirozené číslo.*

Důkaz. Z toho, co tu bylo předtím řečeno, vyplývá, že počet hran úplného grafu, který vznikne sjednocením G a $\bar{G}$, musí být dělitelný čtyřmi (každý z grafů G_1, G_2, $g(G_1)$, $g(G_2)$ obsahuje tentýž počet hran a žádné dva z nich nemají společnou hranu). Je-li n počet uzlů grafu G, pak počet hran tohoto úplného grafu je $n/2(n - 1)$. Má-li být toto číslo dělitelno čtyřmi, musí být $n(n - 1)$ dělitelno osmi, což je možno pouze tehdy, je-li buď n, nebo $n - 1$ dělitelno osmi.

Nyní vyslovme další větu.

Věta 4. *Je-li dána množina uzlů U o $8k$ nebo $8k + 1$ prvcích a na ní permutace p^* taková, že počet uzlů každého jejího cyklu je dělitelný čtyřmi, s výjimkou nejvýše jednoho cyklu tvořeného samodružným uzlem, existuje R_2-graf G isomorfní se svým doplňkem, jehož množinou uzlů je U a permutace p^* je indukována isomorfním zobrazením g grafu G na $\bar{G}$.*

Důkaz provedeme konstrukcí takového grafu. Nechť permutace p^* nemá samodružný uzel a nechť $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \ldots, \mathscr{C}_q$ jsou její cykly. Cyklus $\mathscr{C}_i$ $(i = 1, \ldots, q)$ obsahuje uzly $u_1^{(i)}, \ldots, u_{r_i}^{(i)}$. Čísla r_i jsou dělitelna čtyřmi pro každé $i = 1, \ldots, q$. Budiž n počet uzlů množiny U; zřejmě $n = \sum_{i=1}^{q} r_i$. Pro každý uzel nyní zavedeme ještě druhé označení, a to tak, že uzel $u_j^{(i)}$ označíme v_k, kde pro $j \leqq r_i/2$ je $k = j + \frac{1}{2} \sum_{\beta<i} r_\beta$, pro $j > r_i/2$ je $k = j + 1/2(n - r_i + \sum_{\beta>i} r_\beta)$. Lze dokázat, že je-li $v_k = u_j^{(i)}$, $v_{k'} = u_{j'}^{(i)}$, pak $k \equiv j \pmod 2$, $k - k' \equiv j - j' \pmod 4$. Nyní sestrojujeme graf G následujícím způsobem. Spojíme hranou každé dva uzly s lichými indexy u v. Dále spojíme pro každé sudé α uzel v_α se všemi uzly, jejichž index u v je kongruentní s $\alpha + 1$ modulo 4. Snadno bychom se přesvědčili, že takto sestrojený graf lze isomorfním zobrazením indukujícím permutaci p^* převést v jeho doplněk. Nyní definujeme zobrazení f tak, že pro $k \leqq n - 2$ je $f(v_k) = v_{k+2}$, $f(v_{n-1}) = v_1$, $f(v_n) = v_2$. Obsahuje-li nyní U samodružný uzel w permutace p^*, pak provedeme výše popsanou konstrukci pro $U \dot{-} \{w\}$ a zúžení p^* na $U \dot{-} \{w\}$. Pak spojíme w se všemi uzly množiny $U \dot{-} \{w\}$, které mají lichý index u v. Uzel w bude potom samodružným uzlem i ve zobrazení f. Tím je hledaný graf sestrojen.

Literatura

[1] *R. C. Read:* On the number of self-complementary graphs and digraphs. J. London Math. Soc. *38* (1963), 99—104.

[2] *G. Ringel:* Selbstkomplementäre Graphen. Arch. Math. *14* (1963), 354—358.

[3] *H. Sachs:* Über selbstkomplementäre Graphen. Publ. math. Debrecen, tom. *9*, fasc. 3—4, p. 270—288, Debrecen 1962.

Резюме

РАЗЛОЖЕНИЕ ГРАФА В ИЗОМОРФНЫЕ ПОДГРАФЫ

БОГДАН ЗЕЛИНКА (Bohdan Zelinka), Либерец

В этой статье введено понятие R_2-графа; это граф G, который можно разложить в два изоморфных друг другу подграфа G_1 и G_2, каждый из которых содержит все вершины графа G и которые не имеют общих ребер. В первой части описано построение R_2-графа при заданном множестве U вершин и при заданной его перестановке, порожденной изоморфным отображением G_1 в G_2. Затем доказана теорема:

Если заданы натуральные числа m, n и m четно, $m \leqq n/2(n - 1)$, то существует R_2-граф с n вершинами и m ребрами.

Во второй части описаны свойства R_2-графа, изоморфного его дополнению. Доказаны следующие теоремы:

R_2-граф, изоморфный со своим дополнением, имеет $8k$ или $8k + 1$ вершин, где k - натуральное число.

Если задано множество вершин U с $8k$ или $8k + 1$ элементами и на нем перестановка p^* такая, что число вершин каждого ее цикла делимо на четыре, за исключением, по бóльшей мере, одного цикла, образованного неподвижной вершиной, то существует R_2-граф G, изоморфный со своим дополнением, множеством вершин которого является U и перестановка p^* порождена изоморфным отображением g графа G на $\bar{G}$.

Summary

DECOMPOSITION OF A GRAPH INTO ISOMORPHIC SUBGRAPHS

BOHDAN ZELINKA, Liberec

In this article the term of R_2-graph is introduced; that is the graph G, which is decomposable into two subgraphs G_1 and G_2 isomorphic to one another such that each of them contains all vertices of the graph G and which have no common edges. In the first paragraph one describes a construction of an R_2-graph with a given vertex set U and a given permutation p of it generated by the isomorphic mapping of G_1 onto G_2. Then a theorem is proved:

Given natural numbers m, n and m being even, $m \leqq n/2(n - 1)$, an R_2-graph with n vertices and m edges exists.

In the second paragraph the properties of the R_2-graph isomorphic with its complement are described. Following theorems are proved:

An R_2*-graph isomorphic with its complement has* $8k$ *or* $8k + 1$ *vertices, where* k *is a positive integer.*

Given a vertex set U *with* $8k$ *or* $8k + 1$ *elements and a permutation* p^* *on it such that the number of vertices of each of its cycles is divisible by four, except at most one cycle generated by a fixed vertex, an* R_2*-graph* G *isomorphic with its complement exists, such that its vertex set is* U *and the permutation* p^* *is generated by the isomorphic mapping* g *of the graph* G *onto* $\bar{G}$.