Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Josef Zahradníček

Měření modulu pružnosti v tahu metodou dynamickou

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 59 (1930), No. 3, 189--193

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/109072`

Měření modulu pružnosti v tahu metodou dynamickou.

Josef Zahradníček.

Modul pružnosti v tahu měřívá se obvykle metodou statickou, t. j. z protažení drátu na jednom konci upevněného, na druhém zatíženého, resp. z prohnutí tyče na jednom konci upevněné, na druhém zatížené, nebo na obou koncích podepřené resp. upevněné a uprostřed zatížené. K dosažení náležité přesnosti měření jest ovšem nutno zjemniti měřicí metodu pro určení malých prodloužení resp. prohnutí.

V řadě případů jest možno užíti metody dynamické[1]) t. j. místo nepatrného protažení nebo prohnutí měřiti periodu podélných kmitů drátu na jednom konci upevněného, na druhém zatíženého, resp. příčných kmitů tyče na jednom konci upevněné, na druhém volném kmitající buď se zatížením nebo bez zatížení. V obou těchto případech jak podélných kmitů drátu, tak příčných kmitů tyče vyjdeme od silové rovnice platící pro systém kmitající bez útlumu

$$Ky'' = -Gy; \tag{1}$$

integrál její jest

$$y = A \sin \frac{2\pi}{T} t$$

s podmínkou

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{G}{K}. \tag{2}$$

Zde značí K setrvačnost (hmotu) kmitajícího systému, G pružnost drátu-tyče, T periodu kmitovou. Pro pružnost G jako sílu,

[1]) Obdobně jako měření modulu pružnosti v torsi metodou statickou a dynamickou. — Viz Macků, Novák, Nachtikal, Základy praktické fysiky, II, 96, Brno 1927 a autorovo pojednání „Měření modulu pružnosti v tahu metodou dynamickou“, Spisy přírodovědecké fakulty Masarykovy university v Brně, č. 89, 1927.

jež by způsobila jedničkové protažení resp. prohnutí, plyne ze vztahů daných zákonem Hookeovým

$$\lambda = \frac{1}{E}\frac{Pl}{q}, \quad \delta = \frac{1}{3E}\frac{Pl^3}{\Theta} \tag{3}$$

v prvém resp. druhém případě

$$G \equiv \frac{P}{\lambda} = E\frac{q}{l}, \quad G \equiv \frac{P}{\delta} = 3E\frac{\Theta}{l^3}, \tag{4}$$

kde značí P zatížení, l délku drátu-tyče, q průřez drátu, Θ moment setrvačnosti průřezu tyče obloženého hmotou 1 *gramu* na 1 cm^2 kol osy jdoucí těžištěm průřezu kolmo ke směru působící síly. Z rovnic (2) a (4) vychází pro modul E v tahu

$$E = \frac{4\pi^2}{T^2}\frac{l}{q}K \text{ resp. } E = \frac{1}{3}\cdot\frac{4\pi^2}{T^2}\frac{K}{\Theta}l^3. \tag{5}$$

Setrvačnost K skládá se jednak ze setrvačnosti drátu-tyče K_0 a je rovna $\frac{1}{3}$—$\frac{1}{4}$ setrvačnosti (hmoty) drátu-tyče, k čemuž přistupuje setrvačnost (hmota) zatížení. Je též možno setrvačnost K_0 vyloučiti ze dvou měření

$$\frac{4\pi^2}{T_1^2} = \frac{G}{K_1}, \quad \frac{4\pi^2}{T_2^2} = \frac{G}{K_2}, \tag{6}$$

kde

$$K_1 = K_0 + M_1, \quad K_2 = K_0 + M_2.$$

V případě tyče je možno voliti $M_1 = 0$, je-li tyč takových rozměrů a hmoty, že její kmitočet jest asi 3 *per/sec* anebo menší.

Jako ukázku uvádím zde dvě měření.

Měření I.

Ocelový drát délky $l = 272{\cdot}9\ cm$, průměru $0{\cdot}300_7\ mm$, je zatížen miskou 361·7 *gramů* a závažím 11064 *gramů*. Je tedy setrvačnost podélně kmitajícího systému $K = 11426$ *gramů*. Perioda kmitová naměřená ze 100 kmitů jest $T = 0{\cdot}301_2\ sec$. Odtud určeno $E = 1{\cdot}91_9 \,.\, 10^{12}$ *abs. jedn.*, což je v dosti dobrém souhlasu s hodnotou naměřenou metodou statickou — přístrojem dle prof. *Macků* naměřeno pro týž drát $E = 2{\cdot}01_3 \,.\, 10^{12}$ *abs. jedn.*, což je hodnota o něco větší; úkaz tento zjistil též *Grüneisen* (1907) při měření modulu pružnosti v tahu metodou dynamickou z kmitů akustických.[2])

Systém uvedeme do podélných kmitů vychýlice jej mírným tahem na misku z rovnovážné polohy ve směru svislém dolů a pak

[2]) Grüneisen, Annalen der Physik, 22, 801, 1907.

sám sobě ponecháme; amplituda je jen několik milimetrů, pohyb se dá však pouhým okem dobře sledovati po řadu minut, případně i hodinu, opatříme-li systém zrcátkem a pozorujeme buď dalekohledem se svislou škálou anebo objektivně. Pohyb je jen mírně tlumený asi tak, jako pohyb kyvadlový za podobných podmínek.

Aby se drát v místě upevnění neprodřel, je radno upevniti jej tak, že se vyhneme na něm ostrým kličkám; kol háku ve stropě upevněného ovineme několikrát konec drátu, zbytek pak otočíme ve více závitech kol drátu pod hákem pomocí klíštěk a podobně učiníme i na druhém konci u háčku misky. Dobu kyvu čítáme buď po jedničkách, je-li perioda aspoň $\frac{1}{3}$ sekundy anebo větší, případně po seriích po čtyrkách a to vždy aspoň 100 kmitů, aby doba T byla změřena s přesností aspoň $\frac{1}{2}\%$, t. j. T^2 na 1%. Je-li možno využíti větší výšky než v horním případě, zvětší se doba kyvu při témž drátu a zatížení v poměru $\sqrt{l}$ podobně jako u matematického kyvadla. Tak na př. v ústavu našem napjat byl ocelový drát délky $l = 1355\,cm$ v tunelu sloužícím pro větrání a při zatížení $K =$ $= 8593$ *gramů* — olovněný válec — dával kmity s periodou $T =$ $= 0{\cdot}578\,sec$; průměr drátu $2r = 0{\cdot}0301_0\,cm$. Odtud určeno $E =$ $= 1{\cdot}93_3\,.\,10^{12}$ *abs. jedn.* — v dobrém souhlasu s hodnotou dříve uvedenou.[3])

Měření II.

Ocelová tyč s obdélníkovým průřezem na jednom konci upevněná v dřevěném svěráku v délce $l_0 = 4{\cdot}96\,cm$, na druhém konci v délce $l = 180{\cdot}0\,cm$ zatížená, případně volná, příčně kmitající. Tloušťka tyče byla $a = 0{\cdot}791_0\,cm$, šířka $b = 2{\cdot}49_3\,cm$ (středy z 10 měření), hmota tyče celé $2866{\cdot}0$ *gramů* a z toho připadá při kmitání v úvahu $M = 2789{\cdot}2\,g$. Miska na závaží byla připevněna k tyči tak, aby nekývala a nepůsobila rušivě na vlastní kmit tyče; hmota její byla $21{\cdot}0\,g$. Tyč byla rozkmitávána při zatíženích $M_0 = 0$, $M_1 = 100$, $M_2 = 200, \ldots g$ — 1. sloupec následující tabulky. Rovinou kmitovou byla rovina svislá. Příslušnou dobu kmitu dává druhý sloupec; všechny veličiny jsou *v jednotkách absolutních cm, g, sec.*

Řada těchto měření zpracována v té formě, že kombinována byla spolu měření: 1. a 6., 2. a 7., 3. a 8. atd.

Kohlrauschovo „Lehrbuch der praktischen Physik“ 14, 224, 1923 uvádí pro výšku tónu tyče na jednom konci upevněné a příčně kmitající s frekvencí akustickou vzorec

$$N = \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\frac{a}{l^2}\,\frac{m}{2\pi}\sqrt{\frac{E}{s}},$$

[3]) Složitější metodu k měření modulu pružnosti v tahu u drátu uvádí Sharman, Proc. Cambr. Phil. Soc. 24, 276, 1928.

M_n	T_n	K_0	$\frac{K_0 + M_n}{T_n^2}$	$E \cdot 10^{-12}$
0	0.516	—	—	—
100	549	—	—	—
200	580	—	—	—
300	614	—	—	—
400	644	—	—	—
500	674	708·0	2659	1·985
600	690	705·0	2671	1·994
700	722	709·0	2704	2·018
800	750	716·0	2695	2·012
900	773	734·0	2735	2·042
				2·018

kde a je rozměr tyče spadající do směru kmitání; pro základní tón je číselný faktor $m = 1{\cdot}8757$. Odtud vychází při našem označení pro modul pružnosti v tahu

$$E = \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{M}{\Theta} \cdot \frac{l^3}{m^4};$$

vzorec tento podává však pro E hodnotu malou: $E = 1{\cdot}89_8 \, . \, 10^{12}$ *abs. jedn.* Z toho důvodu zavedl *Swift* pro pomalé kmity tyče korekci ve tvaru[4])

$$\Delta E = E \left(\mp \, 0{\cdot}051 \, \frac{gT^2}{l} \right)$$

dle toho, je-li tyč upevněna svisle dolů nebo svisle nahoru, ale i zde vycházejí hodnoty až o 5% menší. Vzorec (5) vyhovuje celkem nejlépe, ač odvozen je z jednoduché rovnice (1).

Pro řadu případů stačí provésti s tyčí dvě měření period: určíme T_0 pro tyč na jednom konci upevněnou a volně bez zatížení kmitající v rovině vodorovné, pak určíme T_1 pro tyč zatíženou hmotou M_1, jež upevněna je na tyči tak, že těžiště hmoty M_1 je na konci tyče — šroub na přitažení mimo střed. Modul E je pak dán vztahem

$$E = \tfrac{1}{3} \, \frac{4\pi^2}{T_1^2 - T_0^2} \, \frac{M_1}{\Theta} \, l^3, \; \Theta = \tfrac{1}{12} \, a^3 b.$$

U tyče ocelové délky $l = 176{\cdot}3$ *cm*, tloušťky $a = 0{\cdot}891$ *cm*, šířky $b = 2{\cdot}560$ *cm* naměřeno $T_0 = 0{\cdot}433$ *sec* a při zatížení hmotou

[4]) Determination of the modulus of elasticity by dynamical methods, Philos. Magazine, 2, 351, 1926.

$M_1 = 1323$ *gramů* — železný válec — naměřeno $T_1 = 0{\cdot}704$ *sec*; z toho určeno $E = 2{\cdot}05_0 \,.\, 10^{12}$ *abs. jedn.*

Řediteli ústavu exper. fysiky panu prof. dru *B. Macků* děkuji srdečně za vzácné pokyny při této práci.

Fysikální ústav Masarykovy university v Brně, v listopadu 1928.

*

La mesure du module de l'elasticité de traction par la méthode dynamique.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur applique l'équation du mouvement

$$K \frac{d^2y}{dt^2} = -Gy,$$

où K est l'inertie, G l'elasticité du fil ou de la barre, à un fil dont un bout est fixé, l'autre chargé, et vibrant longitudinalement, et à une barre dont un bout est fixé, l'autre soit libre, soit chargé, et vibrant transversalement. On a dans le premier cas

$$G = \frac{P}{y}, \quad y = \frac{1}{E} \cdot \frac{Pl}{q},$$

dans le deuxième

$$G = \frac{P}{y}, \quad y = \frac{1}{3E} \cdot \frac{Pl^3}{\Theta}, \quad \Theta = \tfrac{1}{12}\, a^3b,$$

où l, a, b sont les dimensions, P la charge. De la relation

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{G}{K}$$

il résulte par l'élimination de G l'expression pour le module E, exprimé en fonction des dimensions, de l'inertie du système K et de la période de vibration T. Les mesures ainsi faites s'accordent bien avec le résultat de la méthode statique.