Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 36 (1907), No. 1, 115--120

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109260

díváme na hvězdu druhou a „srovnáváme“. Tento přechod několikráte opakujeme, na př. od α k β, a pak od β k α, a z několika takovýchto jednotlivých odhadů soudíme, o kolik stupňů je která z pozorovaných hvězd jasnější. *Nikdy nesnažme se obě hvězdy viděti současně.*

S počátku vyhledejme si k pozorování takové minimum, aby bylo možno celých 5 hodin změnu od maxima k minimu, nebo od minima k maximu po čtvrt nebo půlhodinách pozorovati a výsledek znázorněme graficky. *N.*

Úlohy.

a) Z mathematiky.

Úloha 1.

Nekonečný periodický řetězec

$$z = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{a + \ldots \text{ in inf.}}}}}$$

nabývá šesteré hodnoty, když současně ve všech periodách permutujeme prvky a, b, c. Dokázati, že o hodnotách těch platí

$$z_1 \,.\, z_3 \,.\, z_5 = z_2 \,.\, z_4 \,.\, z_6 .$$

Dr. *Marian Haas.*

Úloha 2.

Číslo šesticiferné psáno jest veskrze různými číslicemi; týmiž šesti a to vždy všemi číslicemi jest vyznačena jeho $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)$ *a* $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)$. *Které je to číslo?*

Prof. *Ant. Jeřabek.*

Úloha 3.

Kolik různých rovin určeno jest všemi možnými trojinami vrcholů a) pravidelného dvanáctistěnu, b) pravidelného dvacítistěnu? *rv.*

Úloha 4.

Řešiti celistvými kladnými čísly rovnici:

$$(5x - 2y)^{2x+3y-65} = \pm 1.$$

Ant. Lochmann.

Úloha 5.

Kolik existuje různých tvarů trojúhelníka, ve kterých všechny tři úhly obsahují celistvé počty stupňů? *Týž.*

Úloha 6.

Sestrojiti trojúhelník, jsou-li dány: u_c, v_c, r *).

Prof. *Ant. Jeřábek.*

Úloha 7.

Sestrojiti trojúhelník, jsou-li dány: t_c, v_c, γ. *Týž.*

Úloha 8.

Sestrojiti trojúhelník, jsou-li dány: t_c, u_c, c *(algebr. analysí).* *Týž.*

Úloha 9.

Dokažte: má-li mnohostěn, pro který platí věta Eulerova, býti omezen úhelníky o vesměs stejném počtu stran, nemůže tento počet stran přestoupiti číslo 5.

Dr. *B. Bydžovský.*

Úloha 10.

Dokažte: je-li těleso omezeno pětiúhelníky a mimo to úhelníky, jichž počet stran přesahuje 6, je pětiúhelníků vždy nejméně o 12 více než všech ostatních stěn dohromady. *Týž.*

---

*) Užito zde normálního označení dle Strnadovy Geometrie: u_a, u_b, u_c jsou úhlové symmetrály, $v_a \ldots$ výšky, $t_a \ldots$ těžnice, r poloměr opsané a ϱ vepsané kružnice.

Úloha 11.

a) O čtyřúhelník daný opsati jest rovnoběžník pravoúhlý podobný danému.

b) Kdy jsou všechny pravoúhelníky, opsané danému čtyřúhelníku, navzájem podobny? Řed. *A. Strnad.*

Úloha 12.

Jsou-li a, b, c, d délky stran čtyřúhelníka do kružnice vepsaného, kterou mocnost k této kružnici má průsečík úhlopříček? *Týž.*

Úloha 13.

Buďtež $ab \perp cd$ dva navzájem kolmé průměry kružnice, o její střed; poloměr oc jest tětivou ef kolmo půlen v bodě g. a) Přeneseme-li na ob délku $\overline{oh} = \overline{og}$, a protíná-li spojnice eh kružnici v bodě k, jest tětiva fk přibližně rovna straně pravidelného devítiúhelníka dané kružnici vepsaného.

b) Tětivy ac, ef protínají se v bodě l; přeneseme-li na oc délku $cm = cl$ a protíná-li spojnice bm kružnici v bodě n, jest tětiva an přibližně rovna straně pravidelného jedenáctiúhelníka vepsaného dané kružnici. Přesnost obou konstrukcí buď vyšetřena. *Týž.*

Úloha 14.

Strany čtverce mají od průmětny odchylky α, β; které úhly tvoří s průmětnou jeho úhlopříčky? *Týž.*

Úloha 15.

Buďtež δ_1 a δ_2 dvě různé úhlopříčky klence omezeného shodnými stěnami, d_1 a d_2 úhlopříčky jedné stěny. Má se dokázati vztah

$$\delta_1^2 - \delta_2^2 = 2(d_1^2 - d_2^2)$$

a vyšetřiti podmínku, za které při daných δ_1 a δ_2 lze klenec takový sestrojiti. Dr. *Josef Tomáš.*

Úloha 16.

Úsečka spojující středy dvou mimoběžných hran pravid. čtyrstěnu budiž průměrem koule. Pomocí rozšířeného principu Cavalieriho odvoditi jest známý vzorec pro krychlový obsah koule z obsahu čtyrstěnu. Vysloviti ono rozšíření věty Cavalieriho, jak se ho zde užije. Týž.

Úloha 17.

Jak se početně vyšetří poloha bodu $m_4(x_4, y_4)$ vzhledem k trojúhelníku o vrcholech $m_1(x_1, y_1)$, m_2, m_3 (t. j. ve které ze sedmi částí roviny, které povstanou, prodloužíme-li strany trojúhelníka $m_1m_2m_3$, leží bod m_4)? Provésti ku př. pro $m_1(-3, 1)$, $m_2(5, -2)$, $m_3(1, 6)$, $m_4(0, 0)$ [nebo $m_4(6, -3)$]. rv.

Úloha 18.

Tři body a, b, c pohybují se po třech daných přímkách A, B, C danými rychlostmi v kladném směru (ve směru svírajícím daný úhel s kladnou částí osy X). Po které době dospějí do polohy a′, b′, c′ stanovící trojúhelník minimálního nebo maximálního obsahu? Řed. A. Strnad.

Úloha 19.

Vyšetřiti útvar daný v soustavě pravoúhlé rovnicí

$$a)\ 3\sqrt{x} + 4\sqrt{y} = 5\sqrt{x+y}$$
$$b)\ 14\sqrt{x} + 5\sqrt{y} = 10\sqrt{x+y}$$

Týž.

Úloha 20.

Dány jsou body $a\,(12, 8)$, $b\,(0, 2)$, $c\,(8, 0)$ a přímky $A \equiv x - 2y + 10 = 0$, $B \equiv 2x - y - 7 = 0$, $C \equiv x + y + 4 = 0$. Ustanovte trojúhelník, jehož vrcholy a_1, b_1, c_1 leží po řadě na přímkách A, B, C a jehož strany b_1c_1, c_1a_1, a_1b_1 procházejí po řadě body a, b, c. Týž.

Úloha 21.

Vypočísti rovnici společné tečny parabol

$$y^2 = 2px$$
$$x^2 = 2qy$$

a obsah obrazce omezeného oběma parabolami a tou společnou tečnou. Ant. Lochmann.

b) Z deskriptivní geometrie.

Úloha 1.

Vyšetřete graficky všecky rozměry (= sestrojte průměty) kolmého kosočtverečného jehlanu komolého, je-li jedna jeho poboční stěna lichoběžník, mající půdice $ab = 70$ mm, $cd = 40$ mm a ramena $ad = 26$ mm a $bc = 32$ mm. rv.

Úloha 2.

Nalézti nejvyšší a nejnižší body čáry, ve které se pronikají pláště dvou těles rázu kuželového (kuželů nebo válců) s kruhovými podstavami v téže vodorovné rovině (I. prům.). rv.

Úloha 3.

Na ploše kulové dány dvě libovolné kružnice; sestrojiti ony hlavní kružnice, které obou kružnic daných se dotýkají. rv.

Úloha 4.

Dány dvě přímky A, B a bod m; položiti bodem m roviny, jež od přímek daných mají dané odchylky α, β (ku př. $A \perp \pi$, $B \parallel \nu$, bod m kdekoli). rv.

c) Z fysiky.

Úloha 1.

Pod jakým úhlem jest vyhoditi z bodu A rychlostí C těleso, aby se srazilo s tělesem, které v okamžiku vyhození počne padati s výšky h kolmo nad místem B, jehož horiz. vzdálenost od A jest d? Jaká může býti nejmenší rychlost c', aby srážka skutečně nad bodem B nastala? Dr. B. Bydžovský.

Úloha 2.

Na obvodu kružnice jsou umístěny ve stejných odlehlostech čtyři zdroje světelné stejné intensity. Dokažte, že ze všech bodů uvnitř kruhu nejméně je osvětlen střed. Rozšiřte tuto větu na *případ 4 n stejných zdrojů rovnoměrně po obvodu rvzdělených a na případ, že celý obvod je nepřetržitý zdroj světelný všude stejné intensity.* Týž.

Úloha 3.

V kolmé vzdálenosti 1 m od středu kruhové zrcadlící desky (poloměr 50 cm) umístěn je bodový svítící zdroj; vzhledem k němu je se zrcadlem souměrně položena neprůhledná deska kruhová s prvou stejně veliká. Za ní ve vzdálenosti 1 m je postavena bílá stěna s oběma deskami rovnoběžná. Udejte, jaké je osvětlení této stěny, jestliže zrcadlo odráží 90% dopadajícího světla. Týž.

Úloha 4.

Po vodorovné rovině kráčí chodec $1\frac{1}{2}$ m vysoký směrem přímým rychlostí $2\,\frac{m}{sec}$; ve vzdálenosti 4 m od jeho dráhy je vztyčena svítilna 3 m vysoká. Udejte, jaký pohyb vykonává stín temene hlavy chodcovy. Týž.

Úloha 5.

S výšky h m padá volně těleso úplně nepružné na nakloněnou rovinu (odchylka α) úplně nepružnou a pevnou. Jaký bude pohyb tělesa po dopadu? Týž.

Poznámka. Řešení *všech* úloh buďtež zasílána na adressu na obálce uvedenou. Řešení každé úlohy buď psáno na zvláštní čtvrtce a každá čtvrtka buď opatřena podpisem. Ceny za řešení úloh vypsány budou v II. čísle.
