Václav Havel
O projektivním pojetí translačních ploch

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 81 (1956), No. 3, 331--336

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117208

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 81 (1956)

O PROJEKTIVNÍM POJETÍ TRANSLAČNÍCH PLOCH

VÁCLAV HAVEL, Praha.

(Došlo dne 15. července 1955.) DT:513.735

V článku je studováno zobecnění translačních ploch. Řídicí i tvořící křivky jsou nahrazeny obecnými podmnožinami afinního prostoru (resp. projektivního prostoru) se souřadnicemi z daného tělesa. Úvahy úzce souvisí s theorií součtových útvarů v daném afinním prostoru, resp. se zobecněním této theorie pro prostor projektivní.

Podnětem k této poznámce byla mi část referátu [1] prof. Fr. KADEŘÁVKA; prof. Kadeřávek se zmínil o užití translačních ploch při zřizování kleneb z tenkého betonu (zejména při restauračních pracích na stavebních památkách) a o možnosti užití nových ploch, které se jeví jako přirozené zobecnění ploch translačních. Omezuji se na úvahy theoretického rázu, při čemž mi jde především o definici útvarů, které nemusí být nutně plochami; prostor, v němž jsou tyto útvary definovány, je afinní prostor se souřadnicemi z tělesa T, resp. projektivní rozšíření tohoto prostoru. Avšak při zkoumání podmínek, za nichž definovaný útvar je plochou, omezuji se pro jednoduchost na prostor eukleidovský, resp. na jeho projektivní rozšíření. Řadu projektivních vlastností nových ploch lze odvodit z vlastností ploch translačních; z toho důvodu jsem se touto věcí nezabýval. Diferenciálně geometrické vlastnosti, potřebné zejména při statických výpočtech, čekají ovšem na své zpracování.

1. Předmětem našeho vyšetřování bude nejprve afinní n-rozměrný prostor A_n se souřadnicemi z některého tělesa T charakteristiky $p \neq 2$.

Definice 1. a) Nechť platí ${}^1k$, ${}^2k \subset A_n$, $K \in {}^1k \cap {}^2k$. Pak ke každému $X \in {}^2k$ přiřaďme množinu ${}^1k_X$ vzniklou z množiny ${}^1k$ posunutím o vektor KX. Sjednocení $\bigcup\limits_{X \in {}^2k} {}^1k_X$ označme $T_K({}^1k, {}^2k)$ (t. zv. *translační útvar*).

b) Nechť ${}^1l$, ${}^2l \subset A_n$. Pak sjednocení $\bigcup\limits_{{}^1L \in {}^1e, {}^2L \in {}^2e} \{{}^1L + {}^2L\}$ označme $S({}^1l, {}^2l)$ (t. zv. *součtový útvar*).

c) Nechť ${}^1l$, ${}^2l \subset A_n$. Pak sjednocení $\bigcup\limits_{{}^1L \in {}^1e, {}^2L \in {}^2e} \{\frac{1}{2}({}^1L + {}^2L)\}$ označme $S({}^1l, {}^2l)$ (t. zv. *středový útvar*).

Zvolíme-li ${}^1k = {}^2k = \{K, L\}$, pak zřejmě rovnost mezi množinami $T_K({}^1k, {}^2k)$, $T_L({}^1k, {}^2k)$ neplatí. Bod K v def. 1a) je tedy pro uvedenou definici podstatný. Dále si všimněme, že množina C z def. 1c) nezávisí na souřadnicovém systému.

Věta 1. a) *Platí-li předpoklady z def.* 1a), *pak* $T_K({}^1k, {}^2k) = T_K({}^2k, {}^1k)$.

b) *Platí-li předpoklady z def.* 1a) *a je-li bod K počátkem, pak* $T_K({}^1k, {}^2k) = S({}^1k, {}^2k)$.

c) *Platí-li předpoklady z def.* 1a) *a je-li bod K počátkem, pak* $T_K({}^1k, {}^2k) = C(2\,.\,{}^1k, 2\,.\,{}^2k)$. *Naopak, je-li* ${}^1l, {}^2l \subset A_n$ *a je-li počátek středem dvou různých bodů* ${}^1B \in {}^1l$, ${}^2B \in {}^2l$, *pak* $C({}^1l, {}^2l) = T_0(\frac{1}{2}\,.\,{}^1l, \frac{1}{2}\,.\,{}^2l)$.

Důkaz. a) Množina $T_K({}^1k, {}^2k)$ má za své prvky body ${}^1X + {}^2X - K$, kde ${}^1X \in {}^1k$, ${}^2X \in {}^2k$. Zvolíme-li počátek v bodě K, pak žádaná symetrie je ihned patrná. Z důkazu tvrzení a) plyne již důkaz obou zbývajících tvrzení b—c).

Obsahem věty 1 je zobecnění známých vlastností translačních ploch eukleipovského prostoru, a to vlastností o obou systémech základních křivek translační plochy, dále o tom, že každá translační plocha je součtovou plochou dvou křivek a že každá translační plocha je středovou plochou dvou křivek. Námi užitý důkaz zdá se být daleko jednodušší (a při tom obecnější), než důkazy obvykle užívané (viz ku př. [2]).

V další větě předpokládejme, že prostor A_n je reálný eukleidovský prostor E_3. „Křivkou" a „plochou" budeme rozumět jednoduchou křivku a plochu.

Věta 2. *Jsou-li* ${}^1l, {}^2l$ *křivky, pak množina* $C({}^1l, {}^2l)$ *je plochou, právě když pro žádnou dvojici přímek* ${}^1p \parallel {}^2p$ *neplatí* ${}^1l \subset {}^1p$, ${}^2l \subset {}^2p$.

Důkaz. Předpokládejme, že křivky ${}^1l, {}^2l$ mají parametrické rovnice $x = f_1(v)$, $y = f_2(v)$, $z = f_3(v)$, resp. $x = g_1(w)$, $y = g_2(w)$, $z = g_3(w)$. Pak množina $C({}^1l, {}^2l)$ má parametrické rovnice $2x = f_1(v) + g_1(w)$, $2y = f_2(v) + g_2(w)$, $2z = f_3(v) + g_3(w)$. Označme dále $h_{v,w}$ hodnost matice

$$M = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial v}, & \dfrac{\partial y}{\partial v}, & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial w}, & \dfrac{\partial y}{\partial w}, & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{f_1'(v)}{2}, & \dfrac{f_2'(v)}{2}, & \dfrac{f_3'(v)}{2} \\ \dfrac{g_1'(w)}{2}, & \dfrac{g_2'(w)}{2}, & \dfrac{g_3'(w)}{2} \end{pmatrix}.$$

Nyní dokážeme pomocné tvrzení: *Nerovnost $h_{v,w} < 2$ je splněna identicky v argumentech v, w, když a jen když platí některá z těchto dvou podmínek:*

1. $f_1(v) = f_2(v) = f_3(v)$ *identicky v argumentu v,* $g_1(w) = g_2(w) = g_3(w)$ *identicky v argumentu w.*

2. *Funkce f_i', g_i' jsou konstantní a platí $f_i' = q\,.\,g_i'$ pro nenulové q a pro* $i = 1, 2, 3$.

Je-li totiž některý z prvků matice M konstantní funkcí, pak je konstantní funkcí též každý prvek, stojící v témže řádku s původním prvkem. V opačném případě by existovala dvojice v_0, w_0 tak, že $h_{v_0,w_0} = 2$, a to je hledaný spor.

Jsou-li prvky téhož řádku matice M od sebe různé nekonstantní funkce, pak opět existuje dvojice v_0, w_0 tak, že $h_{v_0,w_0} = 2$; to je opět spor. Pomocné tvrzení je tím dokázáno.

Z pomocného tvrzení plyne ihned důkaz poučky 2; podmínka 1, resp. 2 znamená totiž, že křivky ${}^1l$, ${}^2l$ jsou položeny na dvou rovnoběžných přímkách.

Definice 2. Předpokládejme, že množiny ${}^1k, {}^2k \subset A_n$ mají společný bod K a že nadrovina ϱ má s oběma množinami ${}^1k, {}^2k$ prázdný průnik. Každému $X \in {}^2k$ přiřaďme množinu ${}^1k_X$ tak, že 1) je-li $K = X$ anebo $K \neq X$, $KX \parallel \varrho$, pak ${}^1k_X$ vznikne u ${}^1k$ posunutím o vektor KX; 2) je-li $K \neq X$, $\{S_X\} = KX \cap \varrho$, pak ${}^1k_X$ je obrazem množiny ${}^1k$ v homothetii o středu S_X, v níž K je vzor a X jeho obraz. Sjednocení $\bigcup_{X \in {}^2k} {}^1k_X$ označíme $H_{K,\varrho}({}^1k, {}^2k)$.

Všimněme si, že z metrického hlediska není útvar T z def. 1a) speciálním případem útvaru H z def. 2. Je-li v eukleidovském prostoru útvar T plochou, dostáváme zřejmě translační plochu. Je-li obdobně útvar H plochou, dostaneme plochu, kterou zavedl poněkud odlišným způsobem prof. Kadeřávek; speciální případy takovéto plochy byly navrženy pro klenby z tenkého betonu nad obecným čtyrúhelníkovým půdorysem. Souvislost mezi útvary T, H osvětlíme v příštím odstavci.

2. Dále budeme vyšetřovat n-rozměrný projektivní prostor P_n se souřadnicemi z některého tělesa T charakteristiky $p \neq 2$.

Definice 3. Nechť ${}^1l, {}^2l \subset P_n$ a nechť nadrovina σ má s oběma množinami ${}^1l$, ${}^2l$ prázdný průnik. Ke každé dvojici ${}^1L \in {}^1l$, ${}^2L \in {}^2l$ přiřaďme bod $X_{{}^1L,{}^2L}$ tak, že 1) $X_{{}^1L,{}^1L} = {}^1L$ v případě ${}^1L \in {}^1l \cap {}^2l$; 2) $({}^1L{}^2L \cap \sigma, X, {}^1L, {}^2L) = -1$ v případě, že ${}^1L \neq {}^2L$.
Sjednocení $\bigcup_{{}^1L \in {}^1l, {}^2L \in {}^2l} \{X_{{}^1L,{}^2L}\}$ označme $P_\sigma({}^1l, {}^2l)$.

Útvar P z def. 3 je zřejmě zobecněním útvaru C z def. 1b; přechod od P k C lze uskutečnit v rámci přechodu od prostoru P_n k prostoru A_n (nadrovina σ prohlášena za nevlastní).

Za předpokladů z def. 3 platí $P_\sigma({}^1l, {}^2l) = P_\sigma({}^2l, {}^1l)$. Důkaz je snadný.

Projektivní zobecnění útvaru T z def. 1a, resp. útvaru H z def. 2 je dosti složité: Nechť platí ${}^1k, {}^2k \subset P_n$, $K \in {}^1k \cap {}^2k$; nechť dále ϱ, σ jsou nadroviny, které mají s oběma množinami ${}^1k$, ${}^2k$ prázdný průnik. Každému bodu $X \in {}^2k$ přiřaďme množinu ${}^1k_X$ tak, že 1) ${}^1k_K = {}^1k$; 2) je-li $K \neq X$, pak ${}^1k_X$ je obrazem množiny ${}^1k$ v kolineaci o středu $KX \cap \varrho$, nadrovině samodružných bodů σ a o vzoru K s obrazem X. Sjednocení $\bigcup_{X \in {}^2k} {}^1k_X$ označme $\mathfrak{F}_{K,\varrho,\sigma}({}^1k, {}^2k)$.

Lze dokázat, že ke každému útvaru $\mathfrak{F}$ existuje jemu rovný útvar P z def. 3 a naopak. Tím se však již zabývati nebudeme.

Útvar H z def. 2 je speciálním případem útvaru $\mathfrak{F}$ (je-li nadrovina σ nevlastní), a tedy též speciálním případem útvaru P.

Důležitý případ nastane, když prostor P_n je trojrozměrný reálný projektivní prostor. Z poučky 2 lze pak odvodit (na základě vzájemného přechodu mezi eukleidovským prostorem a mezi odvozeným projektivním prostorem): Útvar $P_\sigma({}^1l, {}^2l)$ je plochou, právě když neexistuje žádná dvojice přímek ${}^1p, {}^2p$ se společným bodem v rovině σ, pro něž by platilo ${}^1l \subset {}^1p$, ${}^2l \subset {}^2p$.

Jsou-li ${}^1l, {}^2l$ křivky prostoru E_3 s parametrickými rovnicemi jako v důkazu poučky 2 a má-li rovina σ rovnici $z = 0$, pak parametrické rovnice útvaru $P({}^1l, {}^2l)$ (s výjimkou středů úseček ${}^1L{}^2L$ rovnoběžných s rovinou σ) jsou:

$$x = f_1(v) - \frac{f_3(v)}{f_3(v) + g_3(w)} (f_1(v) - g_1(v)),$$

$$y = f_2(v) - \frac{f_3(c)}{f_3(v) + g_3(w)} (f_2(v) - g_2(w)),$$

$$z = f_3(v) - \frac{f_3(v)}{f_3(v) + g_3(w)} (f_3(v) - g_3(w)).$$

Po úpravě lze tyto rovnice přepsat do tvaru

$$x = \frac{f_1(v)\, g_3(w) + f_3(v)\, g_1(w)}{f_3(v) + g_3(w)}, \quad y = \frac{f_2(v)\, g_3(w) + f_3(v)\, g_2(w)}{f_3(v) + g_3(w)},$$

$$z = \frac{2 \,.\, f_3(v)\, g_3(w)}{f_3(v) + g_3(w)}.$$

Definici 3 lze rozšířit i pro případ, když (asociativní, resp. komutativní) těleso T nahradíme alternativním tělesem. Pro $n \geqq 3$ nedojdeme k žádnému zobecnění, poněvadž příslušný alternativní projektivní prostor je desarguesovský. Pro $n = 2$ nahradí se projektivní desarguesovská rovina rovinou alternativní, v níž definice 3 nepřestává mít smysl. Další zobecnění již není možné vzhledem k ekvivalenci věty o úplném čtyrrohu (resp. *malé* věty Desarguesovy) a k zavedení souřadnic z alternativního tělesa (viz [3], [4]).

LITERATURA

[1] *Fr. Kadeřávek:* Vývoj plochy podmíněný praxí, referát na vědecké konferenci ČVUT, konané r. 1955.

[2] *Kadeřávek-Klíma-Kounovský:* Deskriptivní geometrie, II. díl, str. 834—842; ČSAV, Praha 1954.

[3] *R. Moufang:* Alternativkörper und der Satz vom vollständigen Vierseit, Abh. Math. Sem. Hamburg *9* (1933), str. 207—222.

[4] *Л. А. Скорняков:* Проективное плоскости, Успехи мат. наук *6*(1951) (vyp. 6), str. 112—154.

Резюме

О ПРОЕКТИВНОМ ПОНИМАНИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ДВИЖЕНИЯ

ВАЦЛАВ ГАВЕЛ (Václav Havel), Прага.

(Поступило в редакцию 15/VII 1955 г.) DT: 519.51

В статье обобщена следующая теорема:

Если ${}^1k$, ${}^2k$ — *кривые, лежащие в трехмерном евклидовом пространстве и не удовлетворяющие соотношениям* ${}^1k \subset {}^1p$, ${}^2k \subset {}^2p$, ${}^1p \parallel {}^2p$ (${}^1p$, ${}^2p$ — *прямые*), *то множество середин отрезков, соединяющих точки* ${}^1X$, ${}^2X$ (${}^iX \in {}^ik$), *является поверхностью движения; всякую поверхность движения можно получить таким способом.*

Автор занимается исследованием n-мерного пространства Дезарга D_n и для данного множества точек ${}^1k$, ${}^2k \subset D_n$ и для гиперплоскости $\varrho \subset D_n$ вводит определение множества точек X, обладающих следующим свойством: Четверка точек ${}^1X$, ${}^2X$, X, ${}^1X{}^2X \cap \varrho$ (где ${}^iX \in {}^ik$ и ${}^1X \neq {}^2X$) гармонична.

Если перейти от пространства D_n к соответствующему афинному пространству A_n, то некоторые из свойств указанного множества оказываются обобщением некоторых свойств поверхностей движения. Этим обстоятельством пользуется автор в случае трехмерного действительного пространства; полученные результаты можно применить на практике (бетонные оболочковые сооружения).

Summary

ON THE PROJECTIVE CONCEPTION OF TRANSLATION-SURFACES

VÁCLAV HAVEL, Praha.

(Received July 15, 1955.)

In this paper this theorem is generalized:

Let ${}^1k$, ${}^2k$ *be curves of given* 3*-dimensional Eucleidean space so that the relations* ${}^1k \subset {}^1p$, ${}^2k \subset {}^2p$, ${}^1p \parallel {}^2p$ (${}^1p$, ${}^2p$ *are lines*) *is not true. Then the set of centres of point-pairs* ${}^1X$, ${}^2X$ (${}^iX \in {}^ik$) *is the translation-surface; in this manner every translation surface may be obtained.*

The author investigates the n-dimensional Desarguesian space D_n and defines for two given point-sets ${}^1k$, ${}^2k \subset D_n$ and for the hyperplane $\varrho \subset D_n$ the set of points X with this property:

The quadruple ${}^1X$, ${}^2X$, X, ${}^1X{}^2X \cap \varrho$ (where ${}^iX \in {}^ik$ and ${}^1X \neq {}^2X$) is harmonic.

Changing the space D_n to the affine space A_n the mentioned set obtains some properties which generalise some properties of the translation-surfaces. This fact is used in the 3-dimensional real case for the definition of the surface, which is applicable in the technical practice (the concrete constructions of schell-vaults).