Časopis pro pěstování matematiky

Jan Mařík

Transformace jednorozměrných integrálů

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 82 (1957), No. 1, 93--98

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117237

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1957

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОДНОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

ЯН МАРЖИК (Jan Mařík), Прага.

(Поступило в редакцию 27/II 1956 г.) DT: 517.39

В настоящей работе доказываются некоторые равенства, тесно связанные с известной формулой $\int_{f(a)}^{f(b)} \Phi(y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b \Phi(f(x))\,f'(x)\,\mathrm{d}x$.

Теорема. *Пусть f — непрерывная вещественная функция с ограниченным изменением в интервале $\langle a, b\rangle$. Пусть p, n, v — положительное, отрицательное и полное изменение функции f. Определим в $\langle a, b\rangle$ функции ϱ, $\varkappa$, η следующим образом: Если $x \in (a, b)$ и если функция f строго возрастает (убывает) в точке x, пусть $\varrho(x) = \eta(x) = 1$, $\varkappa(x) = 0$ ($\varrho(x) = 0$, $\varkappa(x) = 1$, $\eta(x) = -1$); в остальных точках интервала $\langle a, b\rangle$ положим $\varrho(x) = \varkappa(x) = \eta(x) = 0$. (Следовательно, $\varrho(x) - \varkappa(x) = \eta(x)$, $\varrho(x) + \varkappa(x) = |\eta(x)|$ для всякого $x \in \langle a, b\rangle$.) Пусть F (соотв. Φ) — функция на множестве $\langle a, b\rangle$ (соотв. $f(\langle a, b\rangle)$). В этом случае для почти всех $y \in E_1$ множество $f^{-1}(y)$ является конечным и обладает тем свойством, что*

$$\eta(x) \neq 0 \quad \text{для каждого } x \in f^{-1}(y)\,; \tag{0}$$

далее, равенства

$$\int_{E_1} \Big(\sum_{f(x)=y} F(x)\,\varrho(x)\Big)\,\mathrm{d}y = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}p(x)\,, \tag{1}$$

$$\int_{E_1} \Big(\sum_{f(x)=y} F(x)\,\varkappa(x)\Big)\,\mathrm{d}y = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}n(x)\,, \tag{2}$$

$$\int_{E_1} \Big(\sum_{f(x)=y} F(x)\,\eta(x)\Big)\,\mathrm{d}y = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}f(x)\,, \tag{3}$$

$$\int_{E_1} \Big(\sum_{f(x)=y} F(x)\,|\eta(x)|\Big)\,\mathrm{d}y = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}v(x)\,, \tag{4a}$$

$$\int_{E_1} \Big(\sum_{f(x)=y} F(x)\Big)\,\mathrm{d}y = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}v(x)\,, \tag{4б}$$

$$\int_{f(a)}^{f(b)} \Phi(y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b \Phi(f(x))\,\mathrm{d}f(x) \tag{5}$$

справедливы в следующем смысле: Если существует (конечный или бесконечный) интеграл Лебега-Стильтьеса в правой части, то сумма за знаком интеграла в левой части имеет смысл для почти всех $y \in E_1$,[1]) интеграл (Лебега) в левой части существует и равен интегралу в правой части.

Доказательство. Пусть $q(y)$ — число элементов множества $f^{-1}(y)$. В силу известной теоремы Банаха (см., напр., [2], стр. 280), имеем

$$\int_{E_1} q(y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b 1\,.\,\mathrm{d}v(x)\,. \tag{6}$$

Положим $L = E[y; q(y) = \infty]$; пусть A — множество тех точек $x \in (a, b)$, в которых f имеет экстремум. Нетрудно обнаружить, что множество $f(A)$ счетно; из (6) следует, что мера множества L равна нулю. Мера множества

$$M = L \cup f(A) \cup \{f(a), f(b)\}$$

равна поэтому также нулю. Докажем, что

$$q(y) = \sum_{f(x)=y} |\eta(x)|\,, \tag{7}$$

$$\tfrac{1}{2}(\operatorname{sgn}(f(b) - y) - \operatorname{sgn}(f(a) - y)) = \sum_{f(x)=y} \eta(x) \tag{8}$$

для всякого $y \in E_1 - M$. Для этой цели возьмем $y \in E_1 - M$; пусть $f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_r\}$, где $a < x_1 < \ldots < x_r < b$ (r — целое число $\geqq 0$). Так как функция f непрерывна, то $f - y$ сохраняет знак в каждом из интервалов $(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_r, b)$. Потому что f не достигает экстремума ни в одной из точек $x_1, \ldots, x_r$, вытекает отсюда, что функция $f - y$ меняет знак в точках $x_1, \ldots, x_r$. Итак, $|\eta(x_j)| = 1$ для $j = 1, \ldots, r$; этим доказано (0) и (7). Далее, очевидно, $\eta(x_{k+1}) = -\eta(x_k)$ для $k = 1, \ldots, r - 1$ и

$$\eta(x_1) = \operatorname{sgn}(y - f(a))\,, \quad \eta(x_r) = \operatorname{sgn}(f(b) - y)\,. \tag{9}$$

Если r — четное, то $\eta(x_r) = -\eta(x_1)$, $\sum_{k=1}^{r} \eta(x_k) = 0$; следовательно,

$$\sum_{k=1}^{r} \eta(x_k) = \tfrac{1}{2}(\eta(x_1) + \eta(x_r))\,. \tag{10}$$

Если r — нечетное число, имеем $\sum_{k=1}^{r} \eta(x_k) = \eta(x_1) = \eta(x_r)$, так что равенство (10) опять справедливо. Из (9), (10) следует (8).

Соотношения (6), (7) показывают, что формула (4a) имеет место для функции $F(x) = 1$ ($x \in \langle a, b \rangle$). Так как

$$\int_{E_1} \tfrac{1}{2}(\operatorname{sgn}(f(b) - y) - \operatorname{sgn}(f(a) - y))\,\mathrm{d}y = f(b) - f(a)\,,$$

[1]) Положим $(\pm\infty)\,.\,0 = 0$; если, напр., $F(x) = -\infty$, $\varrho(x) = 0$, то напишем $F(x)\,.\,\varrho(x) = 0$.

видим [см. (8)], что и равенство (3) справедливо для функции $F(x) = 1$. Подобным образом можно доказать, что равенства (3), (4a), а, следовательно, и равенства (1), (2), верны тоже для всякой функции F, являющейся характеристической функцией некоторого интервала $I \subset \langle a, b \rangle$.

Пусть $\mathfrak{F}$ — система всех ограниченных функций F, для которых (1) справедливо.[2]) Докажем следующее утверждение:

(У) *Если* $F_n \in \mathfrak{F}$, $C > 0$, $|F_n(x)| \leqq C$ $(n = 1, 2, \ldots; a \leqq x \leqq b)$ *и если* $F_n(x) \to F(x)$ *для всякого* $x \in \langle a, b \rangle$, *то* $F \in \mathfrak{F}$.

Действительно, в этом случае

$$\int_{E_1} \Big(\sum_{f(x)=y} F_n(x)\, \varrho(x) \Big)\, \mathrm{d}y = \int_a^b F_n(x)\, \mathrm{d}p(x) \tag{11}$$

для $n = 1, 2, \ldots$ Так как последовательность $F_1, F_2, \ldots$ ограничена, имеем

$$\int_a^b F_n(x)\, \mathrm{d}p(x) \to \int_a^b F(x)\, \mathrm{d}p(x)\,. \tag{12}$$

Если положить $G_n(y) = \sum_{f(x)=y} F_n(x)\, \varrho(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $G(y) = \sum_{f(x)=y} F(x)\, \varrho(x)$ $(y \in E_1 - M)$, то, очевидно, $G_n(y) \to G(y)$ и $|G_n(y)| \leqq \sum_{f(x)=y} |F_n(x)| \leqq Cq(y)$ для $y \in E_1 - M$, и, следовательно, для почти всех y. В силу неравенства $\int_{E_1} Cq(y)\, \mathrm{d}y < \infty$ [см. (6)], получаем $\int_{E_1} G_n(y)\, \mathrm{d}y \to \int_{E_1} G(y)\, \mathrm{d}y$ или

$$\int_{E_1} \Big(\sum_{f(x)=y} F_n(x)\, \varrho(x) \Big)\, \mathrm{d}y \to \int_{E_1} \Big(\sum_{f(x)=y} F(x)\, \varrho(x) \Big)\, \mathrm{d}y\,.$$

Отсюда и из (11), (12) следует, что $F \in \mathfrak{F}$. Этим доказано утверждение (У).

Так как $\mathfrak{F}$ содержит всякую линейную комбинацию своих элементов, то и всякая „ступенчатая" функция (т. е. линейная комбинация характеристических функций интервалов $I \subset \langle a, b \rangle$) принадлежит $\mathfrak{F}$. Нетрудно обнаружить, что всякая непрерывная функция может быть представлена в виде равномерного предела последовательности „ступенчатых" функций и, согласно утверждению (У), является также элементом системы $\mathfrak{F}$.

Пусть, далее, F — ограниченная функция, измеримая по отношению к функции p (p-измеримая). Существуют функции F_1, F_2 второго класса Бера такие, что $F_1(x) \leqq F(x) \leqq F_2(x)$ для каждого $x \in \langle a, b \rangle$ и что $\int_a^b F_i(x)\, \mathrm{d}p(x) = \int_a^b F(x)\, \mathrm{d}p(x)$ $(i = 1, 2)$[3]); очевидно можно предположить, что

---

[2]) Если функция F конечна, то сумма $\sum_{f(x)=y} F(x)\, \varrho(x)$ имеет смысл для всякого $y \in E_1 - M$.

[3]) Существование функций F_1, F_2 вытекает, напр., из теоремы Витали-Каратеодоры (см. [2], стр. 75). Если же, однако, определим интеграл как в [1], то существование функций F_1, F_2 почти очевидно.

и функции F_1, F_2 ограничены. Так как непрерывные функции принадлежат $\mathfrak{F}$, то, в силу утверждения (У), $F_i \in \mathfrak{F}$ для $i = 1, 2$, и, следовательно,

$$\int_{E_1} \Big(\sum_{f(x)=y} F_i(x)\, \varrho(x) \Big)\, \mathrm{d}y = \int_a^b F_i(x)\, \mathrm{d}p(x) = \int_a^b F(x)\, \mathrm{d}p(x) \quad (i = 1, 2)\,.$$

Отсюда и из неравенств

$$\sum_{f(x)=y} F_1(x)\, \varrho(x) \leqq \sum_{f(x)=y} F(x)\, \varrho(x) \leqq \sum_{f(x)=y} F_2(x)\, \varrho(x)\,,$$

верных для почти всех $y \in E_1$, вытекает, что интеграл $\int_{E_1} \Big(\sum_{f(x)=y} F(x)\, \varrho(x) \Big)\, \mathrm{d}y$ существует и равен $\int_a^b F(x)\, \mathrm{d}p(x)$. Этим доказано, что $F \in \mathfrak{F}$.

Если F — произвольная неотрицательная p-измеримая функция, положим (для $n = 1, 2, \ldots$) $F_n(x) = \min(F(x), n)$ $(x \in \langle a, b \rangle)$ и $G_n(y) = \sum_{f(x)=y} F_n(x) \cdot \varrho(x)$, $G(y) = \sum_{f(x)=y} F(x)\, \varrho(x)$ $(y \in E_1 - M)$. Так как $F_n \in \mathfrak{F}$, имеем

$$\int_{E_1} G_n(y)\, \mathrm{d}y = \int_a^b F_n(x)\, \mathrm{d}p(x) \quad (n = 1, 2, \ldots)\,. \tag{13}$$

Очевидные соотношения $F_n(x) \nearrow F(x)$ $(x \in \langle a, b \rangle)$, $G_n(y) \nearrow G(y)$ $(y \in E_1 - M)$ показывают, что $\int_{E_1} G_n(y)\, \mathrm{d}y \to \int_{E_1} G(y)\, \mathrm{d}y$, $\int_a^b F_n(x)\, \mathrm{d}p(x) \to \int_a^b F(x)\, \mathrm{d}p(x)$. Согласно (13), равенство (1) справедливо также для функции F.

Возьмем теперь произвольную функцию F такую, что интеграл Лебега-Стильтьеса $\int_a^b F(x)\, \mathrm{d}p(x)$ существует; положим, как обычно, $F_+(x) = \max(F(x), 0)$, $F_-(x) = \max(-F(x), 0)$ $(x \in \langle a, b \rangle)$. Пусть, напр., $\int_a^b F_+(x) \cdot \mathrm{d}p(x) < \infty$. Тогда и $\int_{E_1} \Big(\sum_{f(x)=y} F_+(x)\, \varrho(x) \Big)\, \mathrm{d}y < \infty$; следовательно, $\sum_{f(x)=y} F_+(x) \cdot \varrho(x) < \infty$ для почти всех $y \in E_1$. Итак, сумма $\sum_{f(x)=y} F(x)\, \varrho(x) = \sum_{f(x)=y} F_+(x)\, \varrho(x) - \sum_{f(x)=y} F_-(x)\, \varrho(x)$ имеет смысл для почти всех $y \in E_1$, так что (1) верно и для функции $F = F_+ - F_-$.

Этим полностью доказано наше предложение, касающееся формулы (1). Точно так же можно доказать формулу (2), если интеграл $\int_a^b F(x)\, \mathrm{d}n(x)$ существует. Формула (4а) [соотв. (3)] является суммой (соотв. разностью) формул (1) и (2).

Далее, из (0) и (4а) следует, что и формула (4б) справедлива (поскольку интеграл в правой части существует).

Пусть, наконец, Φ—функция на множестве $f(\langle a, b\rangle)$ такая, что правая часть в (5) имеет смысл. Согласно (3), будет

$$\int_{E_1} \Psi(y)\, \mathrm{d}y = \int_a^b \Phi(f(x))\, \mathrm{d}f(x)\,, \tag{14}$$

где $\Psi(y) = \sum_{f(x)=y} \Phi(f(x))\, \eta(x)$. Если $y \in f(\langle a, b\rangle) - M$ такое, что сумма $\sum_{f(x)=y} \Phi(f(x))\, \eta(x)$ имеет смысл, то [см. (8)]

$$\Psi(y) = \Phi(y) \,.\, \sum_{f(x)=y} \eta(x) = \Phi(y) \,.\, \tfrac{1}{2}(\operatorname{sgn}(f(b) - y) - \operatorname{sgn}(f(a) - y))\,;$$

если $y \in E_1 - f(\langle a, b\rangle)$, имеем, очевидно, $\Psi(y) = 0$. Следовательно,

$$\int_{E_1} \Psi(y)\, \mathrm{d}y = \int_{f(a)}^{f(b)} \Phi(y)\, \mathrm{d}y.$$

Отсюда и из (14) получаем (5).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *J. Mařík*, Lebesgueův integrál v abstraktních prostorech, Časopis pro pěst. mat., *76* (1951), 175—194.

[2] *S. Saks*, Theory of the integral, New York.

Výtah

TRANSFORMACE JEDNOROZMĚRNÝCH INTEGRÁLŮ

JAN MAŘÍK, Praha.

(Došlo 27. II. 1956.)

Buď f spojitá funkce s konečnou variací v intervalu $\langle a, b\rangle$. Buďte p, n, v positivní, negativní a totální variace funkce f. Definujme v $\langle a, b\rangle$ funkce ϱ, $\varkappa$, η takto: Je-li $x \in (a, b)$ a roste-li (klesá-li) funkce f v bodě x, buď

$$\varrho(x) = \eta(x) = 1\,,\ \varkappa(x) = 0 \quad (\varrho(x) = 0\,,\ \varkappa(x) = 1\,,\ \eta(x) = -1)\,;$$

v ostatních bodech intervalu $\langle a, b\rangle$ buď $\varrho(x) = \varkappa(x) = \eta(x) = 0$. Buď F (resp. Φ) funkce definovaná na množině $\langle a, b\rangle$ (resp. $f(\langle a, b\rangle)$). Potom je pro skoro všechna $y \in E_1$ množina $f^{-1}(y)$ konečná a vztahy (1) až (5) jsou správné v tomto smyslu:

Jestliže existuje (konečný nebo nekonečný) Lebesgue-Stieltjesův integrál na pravé straně, má součet za integračním znamením na levé straně smysl pro skoro všechna $y \in E_1$, integrál na levé straně existuje ve smyslu Lebesgueově a rovná se integrálu na pravé straně.

Résumé

LA TRANSFORMATION DES INTÉGRALES SIMPLES

JAN MAŘÍK, Praha.

(Reçu le 27 Février 1956.)

Soit f une fonction continue à variation bornée dans l'intervalle $\langle a, b\rangle$. Soient p, n, u les variations positive, négative et totale de la fonction f. Définissons les fonctions ϱ, $\varkappa$, η dans l'intervalle $\langle a, b\rangle$ de la manière suivante: Si $x \in (a, b)$ et si la fonction f est croissante (décroissante) au point x, posons

$$\varrho(x) = \eta(x) = 1\,,\ \varkappa(x) = 0\ \ (\varrho(x) = 0\,,\ \varkappa(x) = 1\,,\ \eta(x) = -1\,);$$

dans le reste de l'intervalle $\langle a, b\rangle$ soit $\varrho(x) = \varkappa(x) = \eta(x) = 0$. Soit F (resp. Φ) une fonction définie sur l'ensemble $\langle a, b\rangle$ (resp. $f(\langle a, b\rangle)$). Dans ce cas, l'ensemble $f^{-1}(y)$ est fini pour presque chaque $y \in E_1$ et les relations (1) — (5) sont valables au sens suivant:

Si l'intégrale (finie ou infinie) au second membre existe au sens de Lebesgue-Stieltjes, alors la somme sous le signe de l'intégration au premier membre possède un sens pour presque tout $y \in E_1$, l'intégrale au premier membre existe au sens de Lebesgue et est égale à l'intégrale au second membre.