Věra Šedivá

Několik příkladů topologických prostorů nesplňujících axiom F

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 84 (1959), No. 4, 461--466

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/117322>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1959

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

NĚKOLIK PŘÍKLADŮ TOPOLOGICKÝCH PROSTORŮ NESPLŇUJÍCÍCH AXIOM F

VĚRA ŠEDIVÁ, Praha

(Došlo dne 27. ledna 1959)

DT:513.83

V tomto článku podávám čtyři příklady topologických prostorů, které jsou v jistém smyslu zostřené a v případě I opravou proti-příkladů z [1].

Kniha [1] se soustavně zabývá studiem topologických prostorů, které nemusí splňovat následující axiom: Uzávěr bodové množiny je uzavřená množina. Tento axiom je v [1] nazýván F a prostor, který jej splňuje, F -prostor.

Nyní několik definic, které všechny jsou obsaženy v [1]:

Je-li (P, v) topologický prostor (obecně nesplňující axiom F), $A \subset P$, značí vA závěr množiny A v prostoru (P, v) . Je-li jasné, o jakou topologii se jedná, píšeme též $\overline{A}$ místo vA . Pro $M \subset P - \overline{A}$ je $P - A$ okolí M .

Je-li $\overline{A} = P$, nazývá se množina A hustá v P , je-li $\overline{P - A} = P$, nazývá se A řídká v P .

Množina A se nazývá 1. kategorie v P , je-li sjednocením spočetně mnoha množin řídkých v P .

Je-li $x \in P$, nazývá se x slabý F -bod prostoru P , jestliže vnitřek každého okolí bodu x je zase okolím bodu x .

$x \in P$ se nazývá silný F -bod, jestliže všechna otevřená okolí bodu x tvoří jeho úplnou soustavu okolí.

Množiny $A, B \subset P$ se nazývají H -oddělené, mají-li disjunktní okolí.

Bod $x \in P$ se nazývá R -bod prostoru P , jestliže ke každému okolí U bodu x existuje takové okolí V bodu x , že $\overline{V} \subset U$.

I. V [1] na str. 106 je dokázána následující věta (5.3.6):

Budiž a silný F -bod. Necht pro každou uzavřenou množinu F , která neobsahuje bod a , množiny (a) , F jsou H -oddělené. Pak a je R -bod.

Na str. 140 je uveden příklad (6.4.16), který má ukázat, že věta neplatí, nahradíme-li v ní předpoklad silného F -bodu předpokladem, že a je slabý F -bod. Snadno se nahlédne, že uvedený příklad je chybný.

Uvádím zde jiný příklad:

Buď M množina mohutnosti $2^{\aleph_0}$, N množina přirozených čísel. Prostor P se skládá z $M \times N$ a jednoho dalšího bodu ω . Buď $\mathcal{A}$ diskretní prostor mohutnosti $2^{\aleph_0}$. Buďtež $A_1 \subset \beta\mathcal{A} - \mathcal{A}$, $A_2 \subset \beta\mathcal{A} - \mathcal{A}$ takové, že $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $\text{moh } A_1 = \text{moh } A_2 = 2^{\aleph_0}$ a každá nekonečná podmnožina množiny $\mathcal{A}$ má nekonečně mnoho hromadných bodů v A_1 i v A_2 . v^* značí topologii prostoru $\beta\mathcal{A}$.

Buď $P^* = \mathcal{A} \cup A_1 \cup A_2$; na P^* definuji topologii v takto: Budiž $X \subset P^*$; pro $x \in \mathcal{A}$ je $x \in vX$, právě když je $x \in X$, pro $x \in A_1 \cup A_2$ je $x \in vX$, právě když $x \in X$ nebo $x \in v^*(X \cap \mathcal{A})$.

Pro každé přirozené $n > 2$ označím $M_n = [M \times (1)] \cup [M \times (n-1)] \cup [M \times (n)]$. Buď φ_n prosté zobrazení P^* do M_n takové, že

$$\varphi_n(\mathcal{A}) = M \times (n-1), \quad \varphi_n(A_1) = M \times (n), \quad \varphi_n(A_2) \subset M \times (1),$$

při čemž

$$\varphi_{n_1}(A_2) \cap \varphi_{n_2}(A_2) = \emptyset \quad \text{pro } n_1 \neq n_2 \quad \text{a} \quad \bigcup_{n=3}^{\infty} \varphi_n(A_2) = M \times (1).$$

Buď ještě φ_2 prosté zobrazení $\mathcal{A} \cup A_1$ na $[M \times (1)] \cup [M \times (2)]$ takové, že $\varphi_2(\mathcal{A}) = M \times (1)$, $\varphi_2(A_1) = M \times (2)$.

Na P definuji topologii takto: Je-li $X \subset P$, pak $\omega \in \bar{X}$ právě když $\omega \in X$ nebo $[M \times (n)] \cap X \neq \emptyset$ pro nekonečně mnoho n . Pro $n > 1$, $m \in M$ je $[m, n] \in \bar{X}$, právě když $\varphi_n^{-1}([m, n]) \in v\varphi_n^{-1}(X)$; $[m, 1] \in \bar{X}$, právě když pro nějaké $n \in N$ je $\varphi_n^{-1}([m, 1]) \in v\varphi_n^{-1}(X)$.

V této topologii je zřejmě bod ω slabým F -bodem. Dále jsou zřejmě každé dvě jednobodové množiny H -oddělené. Uzavřené množiny v P , které neobsahují ω , jsou pouze konečněbodové a $\emptyset$, takže každá uzavřená množina F , která neobsahuje ω , je s (ω) H -oddělená. ω však není R -bod, neboť uzávěr každého okolí bodu ω protne množinu $M \times (1)$.

II. V příkladě 6.4.8 v [1] je popsán prostor P takový, že existují podmnožiny $S \subset P$, $D \subset P$ tak, že S je 1. kategorie v $S \cup D$, ale S není 1. kategorie v P .

Uvádím prostor P s touto vlastností: Existuje $S \subset P$ tak, že S je v sobě 1. kategorie, ale S není 1. kategorie v P :

Buď M nespočetný diskretní prostor, $N = \beta M - M$, v_1 topologie prostoru βM . Buď R množina racionálních čísel, v_2 topologie na R daná uspořádáním. Buď $P = (M \times R) \cup N$. Na P definuji topologii takto: Buď $X \subset P$. Pro $m \in M$, $r \in R$ je $[m, r] \in \bar{X}$, právě když $r \in v_2(\{y \in R \mid [m, y] \in X\})$. Pro $x \in N$ je $x \in \bar{X}$, právě když $x \in v_1(\{m \in M \mid [m, 0] \in X\})$. Zřejmě $S = M \times R$ je v sobě 1. kategorie, ale není v P 1. kategorie.

III. Příklad 6. 4. 9 v [1] popisuje topologický prostor P následujících vlastností: existuje $S \subset P$ tak, že každý bod $x \in S$ má okolí U takové, že $U \cap S$ je řídká v P a přitom S není 1. kategorie v P .

Sestrojíme topologický prostor P následujících vlastností: Každý bod $x \in P$ má takové okolí U , že U je 1. kategorie v sobě i v P , ale P není v sobě 1. kategorie:

Pomocné tvrzení. *Buď A diskrétní prostor mohutnosti $2^{\aleph_0}$. Existuje prosté zobrazení ψ systému $\mathfrak{S}$ všech spočetných podmnožin S prostoru A do $\beta A - A$ tak, že pro každou S je $\psi(S)$ hromadným bodem množiny S v βA .*

Důkaz plyne pomocí transfinite indukce snadno z toho, že mohutnost β -obalu spočetného diskrétního prostoru je $2^{2^{\aleph_0}}$.

Označím $\psi(\mathfrak{S}) = A^*$; v^* značí topologii prostoru βA . Na $P_1 = A \cup A^*$ definuji topologii v takto: Je-li $X \subset P_1$, pak pro $x \in A$ je $x \in vX$, právě když $x \in X$, pro $x \in A^*$ je $x \in vX$, právě když $x \in X$ nebo $x \in v^*(X \cap \psi^{-1}(x))$.

Buď nyní M množina mohutnosti $2^{\aleph_0}$, N množina přirozených čísel, $P = M \times N$. Pro každé $n \in N$ buď φ_n prosté zobrazení $(M \times (n)) \cup (M \times (n+1))$ na $A \cup A^*$ tak, že $\varphi_n(M \times (n)) = A^*$, $\varphi_n(M \times (n+1)) = A$. Na P definuji topologii takto: Je-li $X \subset P$, je $x = [m, n] \in \bar{X}$, právě když $\varphi_n(x) \in v(\varphi_n(X))$.

Je-li $x \in P$, $x = [m, n]$, pak množina

$$U = (x) \cup \bigcup_{k=0}^{\infty} \varphi_{n+k}^{-1} \psi^{-1} \varphi_{n+k} \dots \varphi_n^{-1} \psi^{-1} \varphi_n(x)$$

je okolí x v P , je spočetná a nemá izolovaných bodů. Tedy je 1. kategorie v sobě i v P .

Kdyby $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$, pak pro jisté n_1 a jisté $n_2 > 1$ přirozená, by C_{n_1} obsahovala nekonečně mnoho bodů z $M \times (n_2)$. Tedy $\bar{C}_{n_1}$ by vyplnila celé jisté okolí nějakého bodu z $M \times (n_2 - 1)$, tedy C_{n_1} by nebyla řídká v P . Tudíž P není v sobě 1. kategorie.

IV. V [1] na str. 416—417 jsou dokázány věty:

1,18: Sjednocení lokálně konečného souboru řídkých množin v F -prostoru je řídká množina.

1,19: Sjednocení σ -lokálně konečného souboru množin 1. kategorie v F -prostoru P je 1. kategorie v P .

Že v 1,18 nelze předpoklad F -prostoru vynechat, je ukázáno v [1] v příkladě 6.4.1. V následujícím příkladě ukazují, že ho nelze vynechat ani v 1,19.

Příklad prostoru, který je sjednocením lokálně konečného systému řídkých množin a není přitom v sobě 1. kategorie:

Pomocné tvrzení 1: *Budtež $\{C_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$, $\{D_\beta | \beta \in \mathcal{B}\}$ disjunktní systémy disjunktních množin. Nechť $\text{moh } \mathcal{A} = \text{moh } \mathcal{B} = \gamma$ je nekonečná a pro každé $\alpha \in \mathcal{A}$, $\beta \in \mathcal{B}$ je též $\text{moh } C_\alpha = \text{moh } D_\beta = \gamma$. Pak existuje prosté zobrazení φ mno-*

žiny $C = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} C_\alpha$ na množinu $D = \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}} D_\beta$ tak, že pro každé $\alpha \in \mathcal{A}$, $\beta \in \mathcal{B}$ je množina $[\varphi(C_\alpha)] \cap D_\beta$ jednobodová.

Důkaz. Buď M množina mohutnosti γ , ψ prosté zobrazení $\mathcal{A}$ na M , ψ^* prosté zobrazení M na $\mathcal{B}$. Pro každé $\alpha \in \mathcal{A}$ buď ψ_α prosté zobrazení C_α na M , pro každé $\beta \in \mathcal{B}$ buď ψ_β prosté zobrazení M na D_β . Pro $x \in C$ definuji: $\varphi(x) = y \in D$ tak, že $\beta = \psi^*\psi_\alpha(x)$, $y = \psi_\beta\psi(\alpha)$, kde $x \in C_\alpha$. φ má žádané vlastnosti.

Budtež M_1, M_2 dva exempláře diskrétního prostoru mohutnosti $2^{\aleph_0}$. Buď $\mathfrak{S}_i$ systém všech spočetných podmnožin S_i prostoru M_i ($i = 1, 2$).

Snadno se dokáže, že existuje prosté zobrazení ψ_i , které každé množině $S_i \in \mathfrak{S}_i$ přiřadí množinu $\psi_i(S_i) \subset \beta M_i - M_i$ tak, že moh $\psi_i(S_i) = 2^{\aleph_0}$, každý bod $\psi_i(S_i)$ je v βM_i hromadným bodem množiny S_i a pro $S_i, S_i^* \in \mathfrak{S}_i, S_i \neq S_i^*$ jsou $[\psi_i(S_i)] \cap [\psi_i(S_i^*)] = \emptyset$ ($i = 1, 2$).

Uvažuji systémy množin $\{\psi_1(S_1) | S_1 \in \mathfrak{S}_1\}, \{\psi_2(S_2) | S_2 \in \mathfrak{S}_2\}$. Buď φ prosté zobrazení množiny $\bigcup_{S_1 \in \mathfrak{S}_1} \psi_1(S_1) = M_3$ na množinu $\bigcup_{S_2 \in \mathfrak{S}_2} \psi_2(S_2)$ s vlastnostmi, uvedenými v tvrzení 1.

Buď $P^* = M_1 \cup M_2 \cup M_3$. Na P^* definuji topologii v takto (v_i značí topologii prostoru $\beta M_i, i = 1, 2$): Je-li $X \subset P^*, x \in M_1 \cup M_2$, je $x \in vX$, právě když $x \in X$. Je-li $X \subset P^*, x \in M_3$, je $x \in vX$, právě když $x \in X$, nebo $x \in v_1(X \cap S_1)$, kde $S_1 \in \mathfrak{S}_1, x \in \psi_1(S_1)$, nebo $\varphi(x) \in v_2(X \cap S_2)$, kde $S_2 \in \mathfrak{S}_2, \varphi(x) \in \psi_2(S_2)$.

Z definice topologie v na P^* plyne:

Jsou-li $K_1 \subset M_1, K_2 \subset M_2$ nekonečné, existuje bod $x \in M_3$ tak, že $x \in v(K_1 \cup K_2)$ a $K_1 \cup K_2 \cup \{x\}$ je okolím bodu x v P^* .

Je-li M množina, značí $\frac{M \times M}{2}$ množinu všech dvojic (neuspořádaných) různých prvků množiny M .

Pomocné tvrzení 2: Buď M nekonečná množina. Pak existuje množina $A \subset \frac{M \times M}{2}$ a prosté zobrazení χ množiny A na M tak, že platí:

1. Ke každému $m_1 \in M$ existuje $m_2 \in M$ tak, že $(m_1, m_2) \in A$.
2. Je-li C_{m_1} množina všech $m_2 \in M$ taková, že $(m_1, m_2) \in A$, a D_{m_1} množina všech $\chi(m_1, m_2) (m_2 \in C_{m_1})$, je $C_{m_1} \cap D_{m_1} = \emptyset$.
3. Je-li $H \subset M$ nekonečná, existují $h_1, h_2 \in H$ tak, že $(h_1, h_2) \in A$.

Důkaz. Buď $M = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ tak, že A_i jsou po dvou disjunktní a moh $A_i = \text{moh } M$ ($i = 1, 2, 3$). Položíme $A = \frac{A_1 \times A_1}{2} \cup \frac{A_2 \times A_2}{2} \cup \frac{A_3 \times A_3}{2}$.

Ze stejných mohutností plyne, že $\frac{A_1 \times A_1}{2}$ je možno prostě zobrazit na $A_2, \frac{A_2 \times A_2}{2}$ na A_3 a $\frac{A_3 \times A_3}{2}$ na A_1 .

Toto zobrazení A na M má hledané vlastnosti.

Buď M množina mohutnosti $2^{\aleph_0}$, pro každé $m \in M$ buď P_m množina mohutnosti $2^{\aleph_0}$, $P_{m_1} \cap P_{m_2} = \emptyset$ pro $m_1, m_2 \in M$, $m_1 \neq m_2$. Buď $P = \bigcup_{m \in M} P_m$. Na M aplikuji tvrzení 2. $A \subset \frac{M \times M}{2}$ a χ mají tentýž význam jako ve tvrzení 2.

Pro každé $\alpha = (m_1, m_2) \in A$ buď μ_α prosté zobrazení množiny $P_{m_1} \cup P_{m_2} \cup P_{\chi(\alpha)}$ na prostor P^* tak, že $\mu_\alpha(P_{m_1}) = M_1$, $\mu_\alpha(P_{m_2}) = M_2$, $\mu_\alpha(P_{\chi(\alpha)}) = M_3$. Na P definuji topologii takto:

Je-li $X \subset P$, $x \in P_m$, je $x \in \bar{X}$, právě když

$$\mu_{\chi^{-1}(m)}(x) \in v[\mu_{\chi^{-1}(m)}(X)].$$

Z definice topologie na P plyne: Je-li $x \in P_m$, $\chi^{-1}(m) = \alpha = (m_1, m_2)$, má bod x okolí $U \subset P_m \cup P_{m_1} \cup P_{m_2}$. Systém $\{P_m | m \in M\}$ je tedy lokálně konečný. Pro každé $m_1 \in M$ je $\bar{P}_{m_1} = P_{m_1} \cup \bigcup_{m \in D_{m_1}} P_m$ (D_{m_1} ve významu z tvrzení 2.), $\bar{P}_{m_1}$ nevyplní tedy okolí žádného bodu z P , P_{m_1} je řídká v P .

Předpokládejme, že $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$. Existuje přirozené číslo n_0 a nekonečná množina $H \subset M$ tak, že pro každé $h \in H$ je $C_{n_0} \cap P_h$ nekonečná. Podle tvrzení 2 existují $h_1, h_2 \in H$ tak, že $(h_1, h_2) \in A$. $\bar{C}_{n_0}$ tedy vyplní celé okolí jistého bodu $x \in P_{\chi(h_1, h_2)}$. C_{n_0} tedy není řídká v P . Odtud plyne, že P není v sobě 1. kategorie.

LITERATURA

- [1] *Eduard Čech*: Topologické prostory s dodatky *J. Nováka* a *M. Katětova*. Nakladatelství ČSAV, Praha, 1959.

Резюме

НЕСКОЛЬКО ПРИМЕРОВ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ, В КОТОРЫХ НЕ ВЫПОЛНЯЕТСЯ АКСИОМА F

ВЕРА ШЕДИВА (Věra Šedivá), Прага

(Поступило в редакцию 27/I 1959 г.)

Статья содержит конструкции топологических пространств, в которых не выполняется следующая аксиома F : Замыкание множества является замкнутым множеством. В статье показано, что такие пространства обладают разными необычными свойствами. Даются следующие примеры:

Топологическое пространство P и множество $A \subset P$ такое, что A является множеством первой категории в себе, но не первой категории в P (пример II).

Топологическое пространство P , каждая точка x которого имеет окрестность первой категории в себе и в P , но все пространство P не является в себе множеством первой категории (пример III).

Топологическое пространство, которое является объединением локально конечной системы нигде не плотных множеств, но не является множеством первой категории в себе. Все конструкции используют чеховское компактное расширение дискретного пространства.

Summary

SOME EXAMPLES OF TOPOLOGICAL SPACES, IN WHICH THE AXIOM F DOES NOT HOLD

VĚRA ŠEDIVÁ, Praha

(Received January 27, 1959)

The present note contains some constructions of topological spaces, in which the following axiom F does not hold: The closure of every set is closed. It is shown, that these spaces have some unusual properties. Following examples are given:

A topological space P and a set $A \subset P$ such that A is meager in itself but not meager in P .

A topological space P such that (i) P is not meager in itself, (ii) every $x \in P$ has a neighbourhood which is meager in itself as well as in P .

Topological space P , such that (i) P is the union of a locally finite system of nowhere dense (in P) sets, (ii) P is not meager in itself.

In all construction the β -compactification of a discrete space is used.