Časopis pro pěstování matematiky

Pavel Drăgilă

Suites de Laplace périodiques qui se correspondent par parallélisme

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 86 (1961), No. 1, 40--42

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117360`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 86 (1961), Praha

SUITES DE LAPLACE PÉRIODIQUES QUI SE CORRESPONDENT PAR PARALLÉLISME

PAVEL DRĂGILĂ, Timişoara

(Reçu le 10 septembre 1959)

Dans cette Note, on étudie les couples de réseaux conjugués parallèles à invariants égaux, dont les suites de Laplace sont périodiques à période 4.

1. C. GUICHARD, en étudiant les couples de réseaux parallèles dans l'espace S_n, a montré déjà que les transformées de Laplace successives de même ordre se correspondent aussi par parallélisme. Nous nous sommes proposé actuellement de rechercher s'ils peuvent exister des suites de Laplace périodiques qui se correspondent par parallélisme. Il est manifeste que, si des telles suites existent, elles doivent avoir nécessairement la même période.

Nous avons résolu, dans cette note, ce problème interessant dans le cas particulier des suites périodiques de période 4 à invariants égaux. Ces suites furent étudiées systématiquement par G. TZITZEICA dans son manuel [1]. Il a montré que les suites périodiques en question peuvent être définies, au point de vue projectif, par le système

$$x_{uu} - x_{vv} = \frac{h_u}{h} x_u - \frac{h_v}{h} x_v \,, \quad x_{uv} = hx \,, \tag{1}$$

h étant une solution particulière quelconque de l'équation aux dérivées partielles

$$(\lg h)_{uv} = h - \frac{1}{h} \,. \tag{2}$$

2. Le problème que nous allons examiner étant de nature affine, nous devons écrire les équations correspondantes de Tzitzeica dans l'espace affine. Considérons à cet effet une solution particulière $x_0 = \Theta(u, v)$ du système (1), et puis faisons le changement $x = \Theta\bar{x}$.

Dans ce cas, le système (1) devient

$$\bar{x}_{uu} - \bar{x}_{vv} = \left(\frac{h_u}{h} - \frac{2\Theta_u}{\Theta}\right) \bar{x}_u - \left(\frac{h_v}{h} - \frac{2\Theta_v}{\Theta}\right) \bar{x}_v \,, \tag{3}$$
$$\bar{x}_{uv} + \frac{\Theta_v}{\Theta} \bar{x}_u + \frac{\Theta_u}{\Theta} \bar{x}_v = 0 \,.$$

Nous avons défini ainsi, au moyen de ce nouveau système, les mêmes suites (1) au point de vue affine.

Considérons maintenant une paire de réseaux $\bar{x}$, x^* parallèles, qui soient définis par les équations

$$\bar{x}_u = \lambda x_u^* , \quad \bar{x}_v = \mu x_u^* .$$

Posant ensuite les conditions d'intégrabilité

$$(\bar{x}_u)_v = (\bar{x}_v)_u , \quad (x_u^*)_v = (x_v^*)_u ,$$

nous trouvons les deux équations de Laplace

$$(4) \qquad x_{uv}^* + \frac{\lambda_v}{\lambda - \mu} x_u^* - \frac{\mu_u}{\lambda - \mu} x_v^* = 0 , \quad \bar{x}_{uv} + \frac{\mu\lambda_v}{\lambda(\lambda - \mu)} \bar{x}_u - \frac{\lambda\mu_u}{\mu(\lambda - \mu)} \bar{x}_v = 0 .$$

Dans le cas spécial, où les réseuax $\bar{x}$, x^* jouissent des propriétés indiquées, chacune des deux équations (4) doit avoir les invariants égaux, d'où il résulte

$$(5) \qquad \left(\frac{\lambda_v}{\lambda - \mu}\right)_u = \left(\frac{-\mu_u}{\lambda - \mu}\right)_v , \quad \left[\frac{\mu\lambda_v}{\lambda(\lambda - \mu)}\right]_u = \left[\frac{-\lambda\mu_u}{\mu(\lambda - \mu)}\right]_v .$$

Les équations (5) sont satisfaites à la fois pour $\mu = -\lambda$. Mais cette dernière relation ne suffit pas pour assurer l'existence des réseaux périodiques parallèles. Tenant compte encore de la deuxième équation (3) et puis de la nouvelle équation qui résulte de (4),

$$\bar{x}_{uv} - \frac{\lambda_v}{2\lambda} \bar{x}_u - \frac{\lambda_u}{2\lambda} \bar{x}_v = 0 ,$$

on aura $\Theta = c/\sqrt{\lambda}$ ($c = \mathrm{const}$), et ensuite

$$h = \frac{2\lambda\lambda_{uv} - 3\lambda_u\lambda_v}{4\lambda^2} .$$

Si nous remplaçons l'expression de h dans l'équation (2), nous obtenons

$$\left[\lg\left(\frac{2\lambda\lambda_{uv} - 3\lambda_u\lambda_v}{4\lambda^2}\right)\right]_{uv} = \frac{2\lambda\lambda_{uv} - 3\lambda_u\lambda_v}{4\lambda^2} - \frac{4\lambda^2}{2\lambda\lambda_{uv} - 3\lambda_u\lambda_v} .$$

3. Les lignes asymptotiques des surfaces focales des réseaux (1) sont définies par l'équation $\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2 = 0$, ce qui signifie que les surfaces respectives ont la courbure totale positive.

Tenant compte maintenant des relations

$$\bar{x}_u = \lambda x_u^* , \quad \bar{x}_v = -\lambda x_v^* ,$$

il s'ensuit que les asymptotiques des surfaces focales du second réseau seront données par $\mathrm{d}u^2 - \mathrm{d}v^2 = 0$.

Nous pouvons énoncer ainsi le théorème suivant:

Théorème. *Les surfaces focales correspondantes des réseaux parallèles des suites périodiques de période 4 à invariants égaux sont à courbure totale de signes contraires.*

4. Dans le cas particulier où $h = 1$, nous avons déterminé le couple de réseaux parallèles

$$\bar{x} = e^{-2(u+v)}, \quad \bar{y} = e^{-(u+v)} \cos(u - v), \quad \bar{z} = e^{-(u+v)} \sin(u - v),$$
$$x^* = 2(u - v), \quad y^* = e^{u+v} \sin(u - v), \quad z^* = -e^{u+v} \cos(u - v),$$

dont les transformées successives de Laplace forment un couple de suites périodiques se correspondant par parallélisme.

Bibliographie

[1] *G. Tzitzeica*: Geometrie diferenţială proiectivă a reţelelor. Bucureşti 1956.

Výtah

PERIODICKÉ LAPLACEOVY POSLOUPNOSTI VZÁJEMNĚ ROVNOBĚŽNÉ

PAVEL DRĂGILĂ, Timişoara

V práci je vyšetřována existence periodických posloupností, které jsou rovnoběžné. Tato otázka je zde řešena v případě periody 4. Nakonec se uvádějí dvojice rovnoběžných sítí, jejichž Laplaceovy transformace jsou na sebe rovnoběžně zobrazeny.

Резюме

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЛАПЛАСА В СООТВЕТСТВИИ ПАРАЛЛЕЛИЗМА

ПАВЕЛ ДРАГИЛА (Pavel Drăgilă), Тимишоара

В настоящей работе решается вопрос о существовании параллельных периодических последовательностей. Этот вопрос здесь решается для случая, когда период равен 4. В конце приводится пример пары параллельних сетей, лапласовские преобразования которых находятся в соответствии параллелизма.