Časopis pro pěstování matematiky, roč. 91 (1966), Praha

SUR QUELQUES THÉORÈMES LIMITES POUR LES FONCTIONS ALÉATOIRES

FRANTIŠEK ZÍTEK, Praha

(Reçu le 16 novembre 1965)*)

Le présent exposé a été inspiré par la théorie de la convergence des produits de convolution, développée dans la monographie récente [2] de M. Harald BERGSTRÖM. Nous voulons présenter ici, d'une part, quelques considérations auxquelles a donné lieu la comparaison de la méthode de M. Bergström avec la méthode classique des fonctions caractéristiques, et, d'autre part, établir certains résultats concernant les fonctions aléatoires d'intervalle (voir [7]).

1. Nous allons commencer par rappeler quelques notions et résultats bien connus en introduisant en même temps les notations nécessaires. Nous considérerons des suites

$$\{X_{nk}\}\,, \quad k = 1, 2, \ldots, k_n\,; \quad n = 1, 2, \ldots\,; \quad \lim_{n \to \infty} k_n = \infty\,, \tag{1.1}$$

de variables aléatoires définies sur un champ de probabilité donné. Nous supposerons constamment que les variables $X_{n1}, X_{n2}, \ldots, X_{nk_n}$ sont, pour chaque n fixé, stochastiquement indépendantes entre elles et que

$$\lim_{n \to \infty} \max_{1 \leq k \leq k_n} \mathbf{P}\{|X_{nk}| > \varepsilon\} = 0 \tag{1.2}$$

pour tout ε positif. Soient

$$X_n = \sum_{k=1}^{k_n} X_{nk} \tag{1.3}$$

les sommes correspondantes; nous nous intéresserons surtout à la convergence en loi des suites $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$. Nous dénoterons $F_{nk}(x)$ et $F_n(x)$; $k = 1, 2, \ldots, k_n$; $n = 1, 2, \ldots$,

*) L'article reproduit les idées principales du communiqué présenté à la IV[e] Conférence de Prague sur la Théorie de l'Information (Fourth Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes) le 10 septembre 1965.

les fonctions de répartition des X_{nk} et X_n respectivement. Cependant, pour nous conformer aux hypothèses admises dans [2], nous supposerons ici qu'elles sont toutes „continues en moyenne" (cf. [2], p. 19). (Une fonction f est dite continue en moyenne, lorsque'elle vérifie partout

$$(1.4) \qquad f(x) = \tfrac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]\,.)$$

Nous poserons donc

$$(1.5) \qquad F_{nk}(x) = \mathbf{P}\{X_{nk} < x\} + \tfrac{1}{2}\mathbf{P}\{X_{nk} = x\}\,, \quad k = 1, 2, \ldots, k_n\,, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

et

$$(1.6) \qquad F_n(x) = \mathbf{P}\{X_n < x\} + \tfrac{1}{2}\mathbf{P}\{X_n = x\} = \prod_{k=1}^{k_n} {}^*F_{nk}(x)\,; \quad n = 1, 2, \ldots$$

Soient encore $\varphi_{nk}(s) = \int e^{isx}\,\mathrm{d}F_{nk}(x)$ et $\varphi_n(s) = \int e^{isx}\,\mathrm{d}F_n(x)$ les fonctions caractéristiques correspondantes.

La suite (1.1) est alors dite convergente, lorsque la suite $\{F_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, tend vers une fonction de répartition limite, soit F, partout où cette dernière est continue (F sera, elle-aussi, supposée continue en moyenne). On sait bien alors que (1.1) est convergente si et seulement si la suite des fonction caractéristiques φ_n tend vers la fonction caractéristique $\varphi(s) = \int e^{isx}\,\mathrm{d}F(x)$, la convergence étant localement uniforme en s.

Ecrivons encore

$$(1.7) \qquad H_{nk}(x) = F_{nk}(x) - E(x)$$

où E désigne la fonction de répartition d'une variable aléatoire presque sûrement égale à zéro, et soit

$$(1.8) \qquad H_n(x) = \sum_{k=1}^{k_n} H_{nk}(x) = \sum_{k=1}^{k_n} F_{nk}(x) - k_n E(x)\,.$$

On connaît plusieurs conditions nécessaires et suffisantes de la convergence des suites (1.1); elles sont en général assez compliquées, c'est pourquoi nous nous contentons ici de renvoyer à la monographie bien connue [5]. Dans tous les cas, les fonctions H_{nk} jouent un rôle important.

2. Les problèmes de convergence des suites de fonctions de répartition et de leurs convolutions ont été étudiés, d'une façon très systématique et dans un cadre bien général, par M. Harald Bergström. Il a publié ses résultats d'abord dans son Mémoire [1] et puis surtout dans sa monographie [2], qui représente une synthèse de sa théorie. Son principal (et puissant) appareil de travail est la norme gaussienne des fonctions à variation bornée.

Considérons la classe F des fonctions f réelles d'une variable réelle, définies sur $(-\infty, +\infty)$ et continues en moyenne (voir (1.4)); les limites

$$f(x+0) = \lim_{h\to 0+} f(x+h)\,, \quad f(x-0) = \lim_{h\to 0+} f(x-h)\,, \tag{2.1}$$

existant pour tout x réel. Soit M la famille des fonctions $f \in$ F qui sont non-négatives, non-décroissantes et bornées; soit D la partie de M contenant les fonctions telles que

$$f(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0\,; \quad f(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1\,, \tag{2.2}$$

(ce sont donc, compte tenu de nos conditions (1.5), (1.6) etc, des fonctions de répartition). Soient R(D) et R(M) les systèmes des combinaisons linéaires finies à coefficients réels de fonctions de D ou M respectivement. Soit enfin Q la famille des $f \in$ R(M) qui sont non-décroissantes dans les deux intervalles $(-\infty, 0)$ et $(0, +\infty)$; soit $\mathsf{Q}_0 \subset \mathsf{Q}$ la famille des $f \in$ Q vérifiant $f(-\infty) = 0 = f(+\infty)$. Il est évident que toutes ces familles de fonctions font partie de R(M). Dans la suite, nous rencontrerons encore une autre famille, $\tilde{\mathsf{Q}}$, contenant toutes les $f \in$ F qui sont non-décroissantes dans $(-\infty, 0)$ et dans $(0, +\infty)$; on a $\mathsf{Q} \subset \tilde{\mathsf{Q}}$, Q comprend juste celles des $f \in \tilde{\mathsf{Q}}$ qui sont bornées.

Etant donné une suite $\{f_n\}$ de fonctions de F, nous disons qu'elle tend *faiblement* vers une fonction $f \in$ F, lorsque $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ partout sauf sur un ensemble au plus dénombrable des x; si, de plus, $f(-\infty) = \lim_{n\to\infty} f_n(-\infty)$ et $f(+\infty) = \lim_{n\to\infty} f_n(+\infty)$, nous disons que $\{f_n\}$ tend *complètement* vers f. Dans ces cas, nous écrivons $f = \operatorname{flim} f_n$, ou $f = \operatorname{clim} f_n$, respectivement (cf. [2]).

Soit

$$\Phi(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\tfrac{1}{2}t^2\right) \mathrm{d}t\,, \quad -\infty < x < +\infty\,. \tag{2.3}$$

Pour $f \in$ R(M), la norme gaussienne est définie par la formule (cf. [2], chap. 5)

$$_G\|f\|_\sigma = \sup_x \left| f(-\infty) + \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi[(x-t)/\sigma]\, \mathrm{d}f(t) \right|, \quad \sigma > 0\,. \tag{2.4}$$

La fonction f étant fixée, $_G\|f\|_\sigma$ est une fonction non-croissante de l'argument σ (voir [2], p. 60). La norme jouit des quatre propriétés suivantes (cf. [2], p. 58)

1. $_G\|\alpha f\|_\sigma = |\alpha| \cdot {}_G\|f\|_\sigma$,
2. $_G\|f_1 + f_2\|_\sigma \leqq {}_G\|f_1\|_\sigma + {}_G\|f_2\|_\sigma$,
3. si $_G\|f_1\|_\sigma = 0$, alors $_G\|f_1 * f_2\|_\sigma = 0$,
4. si $_G\|f\|_\sigma = 0$ pour tout $\sigma > 0$, la fonction $f \in$ R(M) est identiquement nulle.

Une suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fonctions $f_n \in \mathsf{R}(\mathsf{M})$ est dite *de Cauchy en norme gaussienne* lorsque

$$(2.5) \qquad {}_G\|f_n - f_m\|_\sigma \to 0$$

quand $\min(m, n) \to \infty$, pour tout $\sigma > 0$.

Le cas le plus intéressant de notre point de vue est celui des fonctions $f \in \mathsf{Q}_0$; ce sont p. ex. les fonctions H_{nk} et H_n du paragraphe 1 qui appartiennent à cette famille. L'importance de la condition (2.5) pour l'étude de la convergence des suites (1.1) est rendue visible par le théorème que M. Bergström donne dans [2], p. 77, (cf. aussi [1], théorème 9.4), si nous le confrontons avec les conditions classiques connues de [5].

Parmi les résultats particuliers concernant la convergence des suites (1.1) nous allons considérer avant tout le théorème suivant (voir [2], p. 184):

Soit $\{F_{nk}\}$, $k = 1, 2, \ldots, k_n$; $n = 1, 2, \ldots$; $\lim_{n\to\infty} k_n = \infty$, *une suite de fonctions de* D *et supposons que nous ayons*

$$(2.6) \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} {}_G\|F_{nk} - E\|_\sigma^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} {}_G\|H_{nk}\|_\sigma^2 = 0$$

pour tout $\sigma > 0$. *Alors les produits de convolution*

$$F_n = \prod_{k=1}^{k_n}{}^{*} F_{nk}$$

tendent, avec $n \to \infty$, *vers une fonction* $F \in \mathsf{D}$ *si et seulement si la suite des fonctions* H_n [*cf.* (1.7) *et* (1.8)] *est de Cauchy en norme gaussienne.*

Il est d'ailleurs assez facile de trouver même l'interprétation de la fonction $H \in \tilde{\mathsf{Q}}$ vers laquelle la suite $\{H_n\}$ tend complètement: elle correspond à la fonction caractéristique limite par l'intermédiaire de sa représentation canonique (voir [5]).

3. Le théorème que nous venons de citer rappelle manifestement le résultat classique connu sous le nom de „lemme de Bawly“ (voir p. ex. [4]):

Soit donnée une suite (1.1) *pour laquelle*

$$(3.1) \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} |\varphi_{nk}(s) - 1|^2 = 0$$

pour tout s réel. Alors (1.1) *est convergente, la fonction caractéristique limite étant* $\varphi(s) = \exp[\psi(s)]$, *si et seulement si*

$$(3.2) \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} [\varphi_{nk}(s) - 1] = \psi(s)$$

pour tout s réel.

La ressemblance de ces deux théorèmes paraît témoigner d'une relation intime existant entre la norme gaussienne et une norme analogue qu'il est possible de définir à l'aide des fonctions caractéristiques (ou transformées de Fourier) des fonctions $f \in \mathsf{R}(\mathsf{M})$. En effet, pour $f \in \mathsf{R}(\mathsf{M})$, $\sigma > 0$, écrivons

$$(3.3) \qquad {}_F\|f\|_\sigma = |f(-\infty)| + \sup_{|s| \leqq 1/\sigma} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ist} \, \mathrm{d}f(t) \right| .$$

Il est aisé de vérifier que la norme ainsi définie jouit aussi des quatre propriétés 1. – 4. dont nous avons parlé tout à l'heure. De plus, f étant fixée, ${}_F\|f\|_\sigma$ est une fonction *non-croissante de* σ.

Il est bien évident que toutes les fonctions $f \in \mathsf{D}$ ont la norme ${}_F\|f\|_\sigma$ égale à 1, on trouve d'ailleurs facilement que pour les fonctions monotones $f \in \mathsf{M}$, les deux normes ${}_F\|f\|_\sigma$ et ${}_G\|f\|_\sigma$ sont identiques: ${}_G\|f\|_\sigma = {}_F\|f\|_\sigma = f(+\infty) =$ constante indépendante de σ. Nous pouvons même énoncer un théorème analogue au théorème donné dans [2], p. 73.

Soit $\{f_n\}$ *une suite de fonctions* $f_n \in \mathsf{M}$, $n = 1, 2, \ldots$; *elle tend complètement vers* $f \in \mathsf{M}$ *si et seulement si*

$$(3.4) \qquad \lim_{n \to \infty} {}_F\|f_n - f\|_\sigma = 0$$

pour tout σ *positif.*

La démonstration en est facile. On peut soit représenter les fonctions $f \in \mathsf{M}$ à l'aide des fonctions de répartition

$$f(x) = f(-\infty) + [f(+\infty) - f(-\infty)] \, F(x) \, , \quad F \in \mathsf{D} \, ,$$

ce qui réduit le problème au théorème limite de P. Lévy (cf. [4]), soit modifier un peu la démonstration de ce dernier.

Or cela ne signifie nullement que les deux normes considérées soient équivalentes dans $\mathsf{R}(\mathsf{M})$ tout entier; nous allons voir un exemple de fonctions $f_n \in \mathsf{R}(\mathsf{D})$ telles que ${}_F\|f_n\|_\sigma \to 0$ pour tout $\sigma > 0$ tandis que ${}_G\|f_n\|_\sigma$ restent bornées inférieurement.

4. L'exemple suivant est emprunté, en principe, à F. J. Dyson [3]. Soit

$$f_n(x) = \frac{\log [n^2(x^2 + n^2)] - \log (n^2 x^2 + 1)}{4 \log n} \, , \quad n = 1, 2, \ldots$$

et posons $F_n(x) = f_n(x)$ pour $x \leqq 0$, $F_n(x) = 1$ pour $x \geqq 0$, $G_n(x) = 1 - F_n(-x)$. Alors $F_n \in \mathsf{D}$, $G_n \in \mathsf{D}$ et $f_n = (F_n - G_n) \in \mathsf{R}(\mathsf{D})$. Or

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{isx} \, \mathrm{d}f_n(x) = i\pi \operatorname{sgn} s [e^{-|s|/n} - e^{-|s|n}] \, (2 \log n)^{-1} ,$$

donc ${}_F\|f_n\|_\sigma < \pi/(2\log n)$ pour tout $\sigma > 0$; on a donc bien $\lim_{n\to\infty} {}_F\|f_n\|_\sigma = 0$. Par contre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi[(x-t)/\sigma]\, \mathrm{d}f_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x-t)\,(2\pi)^{-1/2} \exp\left[-\tfrac{1}{2}t^2/\sigma^2\right] \mathrm{d}t\,.$$

Comme $f_n(x) \geqq 0$, et $f_n(x) \geqq f_n(1) = \frac{1}{2}$ pour $|x| \leqq 1$, nous avons l'inégalité

$$\begin{aligned} {}_G\|f_n\|_\sigma &\geqq \int_{-1}^{+1} f_n(-t)\,(2\pi)^{-1/2} \exp\left[-\tfrac{1}{2}t^2/\sigma^2\right] \mathrm{d}t \geqq \\ &\geqq \tfrac{1}{2}[\Phi(1/\sigma) - \Phi(-1/\sigma)] = \tfrac{1}{2} - \Phi(-1/\sigma) > 0\,. \end{aligned}$$

Les normes gaussiennes restent donc toujours plus grandes qu'une valeur positive (dépendant de σ, mais non pas de n); elles ne tendent donc vers zéro pour aucune valeur de σ.

Ceci laisse cependant encore ouvert le problème le plus intéressant de la relation exacte qui existe entre les deux normes en question lorsqu'on se limite à la classe Q (ou Q_0).

5. Nous allons envisager maintenant les connexions avec la théorie des fonctions aléatoires d'intervalle. Nous avons déjà signalé à plusieurs reprises les contacts de cette théorie avec la théorie des lois-limites; il n'est donc pas du tout surprenant de trouver que la théorie de M. Bergström peut être utile pour l'étude des fonctions aléatoires d'intervalle et de leurs intégrales. Nous l'avons d'ailleurs prouvé pour la première fois déjà dans [9]. Dans ce qui va suivre, la terminologie, les notations et les résultats principaux de [7], [8], [9] sont supposés connus.

L'exemple du théorème de M. Bergström que nous avons reproduit ici à la fin du paragraphe 2 suggère la possibilité d'énoncer le théorème suivant:

Soit $\boldsymbol{X}$ *une fonction aléatoire d'intervalle (à accroissements indépendants) définie dans un intervalle K, continue en* $\emptyset$ *sur K; soit*

$$F(I, x) = \mathbf{P}\{X(I) < x\} + \tfrac{1}{2}\mathbf{P}\{X(I) = x\}\,, \quad I \in \boldsymbol{K}\,, \tag{5.1}$$

la fonction de répartition correspondante. Ecrivons

$$H(I, x) = F(I, x) - E(x)\,, \tag{5.2}$$

$$H_\sigma(I, x) = H(I, x) * \Phi(x/\sigma)\,, \tag{5.3}$$

et supposons que nous ayons

$$\int_{\boldsymbol{K}} {}_G\|H(I, x)\|_\sigma^2 = 0 \tag{5.4}$$

pour tout $\sigma > 0$. Alors la fonction aléatoire $\boldsymbol{X}$ est (BB)-intégrable dans K si et seulement si l'intégrale

$$\int_K H_\sigma(I, x) \tag{5.5}$$

converge uniformément en $x \in (-\infty, +\infty)$ pour tout σ positif.

Nous rappelons la notion de convergence uniforme de l'intégrale de Burkill, introduite et étudiée dans [11] (cf. aussi [9]): étant donné une fonction d'intervalle $f(I, x)$ dépendant d'un paramètre réel (ou complexe) $x \in X$, nous disons que son intégrale de Burkill $F(J, x) = \int_J f(I, x)$ converge uniformément en $x(\in X)$, lorsque pour toute suite de partitions $\mathscr{D}_n$ de l'intervalle J, avec $\nu(\mathscr{D}_n) \to 0$, la suite correspondante des sommes $\sum_{\mathscr{D}_n} f(I, x)$ tend vers $F(J, x)$, la convergence étant uniforme par rapport à x: à tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver un entier N tel que pour $n > N$ on ait $|F(J, x) - \sum_{\mathscr{D}_n} f(I, x)| < \varepsilon$ pour tout $x \in X$.

D é m o n s t r a t i o n. Etant donné une suite de partitions $\mathscr{D}_n$ de l'intervalle K, $\mathscr{D}_n = \{I_1^{(n)}, I_2^{(n)}, \ldots, I_{k_n}^{(n)}\}$, telle que $\lim_{n\to\infty} \nu(\mathscr{D}_n) = 0$, écrivons $X_{nk} = X(I_k^{(n)})$, $k = 1, 2, \ldots, k_n$, en gardant les notations (1.3), (1.5) et (1.6). Indépendamment du choix des $\mathscr{D}_n$, la condition (5.4) entraîne toujours (2.6). En vertu du théorème mentionné de M. Bergström, il suffit donc de montrer ceci:

L'intégrale (5.5) converge uniformément en $x \in (-\infty, +\infty)$, pour chaque σ positif, si et seulement si la suite des fonctions

$$H_n(x) = \sum_{k=1}^{k_n} H(I_k^{(n)}, x) \tag{5.6}$$

est de Cauchy en norme gaussienne, qu'elle que soit la suite $\{\mathscr{D}_n\}$ choisie, (pourvu que, bien entendu, $\nu(\mathscr{D}_n) \to 0$).

Supposons d'abord (5.5) uniformément convergente. Nous aurons donc (cf. [9]) pour chaque $\sigma > 0$, $\varepsilon > 0$ l'inégalité

$$\sup_x \Big|\sum_{k=1}^{k_n} H_\sigma(I_k^{(n)}, x) - \sum_{k=1}^{k_m} H_\sigma(I_k^{(m)}, x)\Big| < \varepsilon \tag{5.7}$$

pourvu que n et m soient suffisamment grands, $n, m > N = N(\varepsilon, \sigma)$. Or cela signifie justement que la suite des fonctions H_n de (5.6) est de Cauchy en norme gaussienne.

Supposons maintenant par contre que toutes les suites des H_n soient de Cauchy en norme gaussienne et supposons que l'intégrale (5.5) ne soit pas uniformément convergente. Or, cela signifie qu'il existe deux nombres positifs ε et σ tels que pour chaque $n = 1, 2, \ldots$ il existe deux partitions $\mathscr{D}_n'$ et $\mathscr{D}_n''$ de l'intervalle K, $\nu(\mathscr{D}_n') < 1/n$, $\nu(\mathscr{D}_n'') < 1/n$, et un nombre réel x_n, tels que

$$\Big|\sum_{\mathscr{D}_n'} H_\sigma(I, x_n) - \sum_{\mathscr{D}_n''} H_\sigma(I, x_n)\Big| \geqq \varepsilon\,. \tag{5.8}$$

Formons maintenant la suite $\{\mathscr{D}_n\}$ en posant $\mathscr{D}_{2n-1} = \mathscr{D}'_n$, $\mathscr{D}_{2n} = \mathscr{D}''_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Nous aurons $v(\mathscr{D}_n) \to 0$, car $v(\mathscr{D}_n) < 1/m$ pour $n > 2m - 1$. Soit $\{H_n\}$ la suite des fonctions (5.6) correspondantes. D'après l'hypothèse faite, cette suite est de Cauchy en norme gaussienne, ce qui veut dire que, quels que soient $\varepsilon > 0$ et $\sigma > 0$, on peut trouver un entier $N = N(\varepsilon, \sigma)$ tel que (5.7) ait lieu pour n, $m > N$. Mais cela est en contradiction avec (5.8) et notre choix des partitions $\mathscr{D}_n$; l'intégrale (5.5) est donc bien convergente, uniformément en x, c.q.f.d.

Une autre inspiration nous est fournie par le lemme 5 de notre travail [8]; nous en obtenons l'énoncé suivant:

Soit $\boldsymbol{X}$ *une fonction aléatoire d'intervalle définie dans K. Pour qu'elle soit (BB)-intégrable dans K et que l'on ait*

$$\mathbf{P}\left\{(BB)\text{-}\int_J \mathbf{X} = 0\right\} = 1 \tag{5.9}$$

pour tout intervalle $J \in \boldsymbol{K}$, *il faut et il suffit que*

$$\int_K {}_F\|H(I, x)\|_\sigma = 0 \tag{5.10}$$

ait lieu pour tout σ *positif.*

Démonstration. I. Si (5.9) est vrai pour tout $J \in \boldsymbol{K}$, le lemme 5 de [8] entraîne l'égalité (4.15) de [8], mais c'est exactement notre condition (5.10) [on a, bien entendu, $\varphi(I, s) = \int e^{isx}\, \mathrm{d}F(I, x)$].

II. Supposons par contre que (5.10) ait lieu. Des inégalités élémentaires montrent alors d'une part que l'intégrale

$$\int_K |\varphi(I, s) - 1|^2 = 0 \tag{5.11}$$

converge localement uniformément en s, et d'autre part que l'intégrale

$$\int_K [\varphi(I, s) - 1] = 0 \tag{5.12}$$

converge localement uniformément en s. Nous pouvons donc appliquer le lemme 2 de [8] (lemme de Bawly) et nous obtenons (5.9), c.q.f.d.

On peut s'attendre qu'il serait possible de démontrer un théorème analogue où la condition (5.10) serait remplacée par

$$\int_K {}_G\|H(I, x)\|_\sigma = 0 \tag{5.13}$$

(pour tout $\sigma > 0$).

Il est clair que la théorie de M. Bergström (et la notion de norme gaussienne en particulier) pourrait être utile dans d'autres domaines encore. Il serait sans doute possible d'exploiter ces idées en étudiant les problèmes de convergence des suites de fonctions aléatoires (à accroissements indépendants) tels qu'on les a envisagés p.ex. dans [6] ou [10]; nous nous contentons cependant ici de cette remarque générale, sans entrer dans les détails, ce qui nous amènerait déjà trop loin.

Bibliographie

[1] *H. Bergström:* On the limit theorems for convolutions of distribution functions. Journal für die reine und angewandte Mathematik, *198* (1957), 121—142; *199* (1958), 1—22.

[2] *H. Bergström:* Limit theorems for convolutions. Stockholm—New York 1963.

[3] *F. J. Dyson:* Fourier transforms of distribution functions. Canadian Journal of Mathematics, *5* (1953), 554—558.

[4] *Б. И. Гливенко:* Курс теории вероятностей. Москва—Ленинград 1939.

[5] *B. W. Gniedenko, A. N. Kolmogorow:* Rozkłady graniczne sum zmiennych losowych niezależnych. Warszawa 1957.

[6] *E. G. Kimme:* On the convergence of sequences of stochastic processes. Transactions Amer. Math. Soc. *84* (1957), 208—229.

[7] *F. Zítek:* Fonctions aléatoires d'intervalle. Czechoslovak Math. Journal, *8* (1958), 583—609.

[8] *F. Zítek:* Fonctions aléatoires d'intervalle, II. Czechoslovak Math. Journal, *10* (1960), 457—473.

[9] *F. Zítek:* Poznámka k teorii (BB)-integrálu. Časopis pro pěstování matematiky, *84* (1959), 83—89.

[10] *F. Zítek:* On the convergence of sequences of stochastic processes. Časopis pro pěstování matematiky, *88* (1963), 283—294.

[11] *F. Zítek:* Burkillovy integrály závislé na parametru. Časopis pro pěstování matematiky, *84* (1959), 165—176.

Adresse de l'auteur: Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV).

Výtah

O NĚKTERÝCH LIMITNÍCH VĚTÁCH PRO NÁHODNÉ FUNKCE

FRANTIŠEK ZÍTEK, Praha

Článek navazuje na výsledky H. Bergströma publikované v [1] a [2]. V první části jsou Bergströmovy metody porovnávány s klasickými metodami založenými na použití charakteristických funkcí. Paralelně k jeho gaussovské normě (2.4) je pro funkce, které mají konečnou variaci a splňují (1.4), zavedena analogická fourierovská norma (3.3). Jak je ukázáno v odst. 4, nejsou tyto normy obecně ekvivalentní.

V další části se pak některých Bergströmových výsledků pro konvergenci posloupností (1.1) využívá k odvození analogických výsledků pro existenci integrálů náhodných funkcí intervalu (viz [7] a [8]).

Резюме

О НЕКОТОРЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМАХ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

ФРАНТИШЕК ЗИТЭК (František Zítek), Прага

Статья тесно связана с работами [1] и [2] Г. Бергстрема. В первой ее части сравниваются методы Бергстрема с классическими методами, основанными на использовании характеристических функций. Параллельно его гауссовской норме (2.4) вводится для функций с конечным изменением, удовлетворяющих (1.4), аналогичная норма Фурье (3.3). Как показано в пар. 4, эти нормы в общем случае не эквивалентны. В дальнейшей части некоторые результаты Бергстрема, касающиеся сходимости последовательностей (1.1), использованы для установления аналогичных результатов для существования интегралов случайных функций интервала (см. [7] и [8]).