Časopis pro pěstování matematiky

Jiří Štěpánek

Die Lösung des Dirichletschen und Neumannschen Problems für die Poissonsche Gleichung auf Flächen mit Hilfe der Greenschen Funktion

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 92 (1967), No. 1, 81--88

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117600`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 92 (1967), Praha

DIE LÖSUNG DES DIRICHLETSCHEN UND NEUMANNSCHEN PROBLEMES FÜR DIE POISSONSCHE GLEICHUNG AUF FLÄCHEN MIT HILFE DER GREENSCHEN FUNKTION

JIŘÍ ŠTĚPÁNEK, Praha

(Eingelangt am 10. Dezember 1965)

In der Arbeit wird die Greensche Formel von der Ebene auf Flächen, die mit der Ebene konform sind, übertragen und durch eine Adaptation der Beweise in der Ebene werden weitere Greensche Formeln auf diesen Flächen hergeleitet. Auf diesem Grund werden die Greensche Funktionen für das Dirichletsche und Neumannsche Problem auf Flächen mit dem metrischen Tensor 1, 0, $g(r)\,h(\varphi)$ eingeführt und es wird die formalle Lösung dieser Aufgaben in einer Integralform angegeben.[1])

1. DIE GREENSCHE FORMELN AUF EINER MIT DER EBENE KONFORMEN FLÄCHE

Die Greensche Formel auf der Ebene $x^3 = 0$ im E_3 kann man in den Krummlinienkoordinaten $'\xi^a$ in der Form

$$(1)\qquad \iint_\sigma {}'\nabla_a {}'\varphi^a \,\mathrm{d}\sigma = \int_\gamma {}'\varphi^a \,{}'\nu_a \,\mathrm{d}\gamma$$

schreiben, wo $'\varphi^a$ ein mit seinen partiellen Ableitungen erster Ordnung stetiger Vektor in einem beschränkten, abgeschlossenen Gebiet $\bar{\sigma}$ mit der Grenzkurve γ (die teilweise glatt ist) ist, $'\nu_a$ ist der Einheitsvektor der äusseren Normalle zu der Kurve γ, $'\nabla_a$ ist die kovariante Ableitung. Dabei ist $\mathrm{d}\sigma = \sqrt{('D)}\,\mathrm{d}'\xi^1\,\mathrm{d}'\xi^2$, wo $'D$ die Determinante des metrischen Tensors $'\delta_{ab}$ der Ebene ist, $\mathrm{d}\gamma^2 = {}'\delta_{ab}\,\mathrm{d}'\xi^a\,\mathrm{d}'\xi^b$.

[1]) Diese Behandlung knüpft an meine Arbeiten: „Poissonsche, Wellen- und Wärmeleitungsgleichung auf Flächen“, „Das Dirichletsche Problem für die Laplace-Gleichung auf dem geodätischen Kreis einer Fläche“, „Das Dirichletsche Problem für die Laplace-Gleichung auf dem Gebiet einer Fläche“, „Das Dirichletsche Problem für die Wellen- und Wärmeleitungslgeichung auf dem geodätischen Kreis einer Fläche“ an. Diese Arbeiten werden im weiteren kurz I, II, III, IV bezeichnet.

Es sei eine Fläche $\mathcal{S}$ im E_3 mit den Gleichungen $x^\alpha = x^\alpha(\xi^a)$, die mit unserer Ebene konform ist, gegeben, wobei die konforme Abbildung mit den Gleichungen

$$\xi^a = \xi^a('\xi^b) \tag{2}$$

gegeben. Die Vektoren $'\varphi^a$, $'v_a$ übergehen bei der Abbildung (2) in die Vektoren f^a, n_a auf der Fläche wobei

$$f^a = \frac{\partial \xi^a}{\partial' \xi^b}\,'\varphi^b\,, \quad n_a = \frac{\partial' \xi^b}{\partial \xi^a}\,'\gamma_b$$

gilt und der Tensor $'\delta_{ab}$ übergeht in den metrischen Tensor g_{ab} der Fläche, wobei

$$g_{ab} = \frac{\partial' \xi^c}{\partial \xi^a}\frac{\partial' \xi^d}{\partial \xi^b}\,'\delta_{cd}$$

ist. Nachdem die Ausdrücke in (1) invariant zu der Transformation (2) sind, bekommt man von (1)

$$\iint_s \nabla_a f^a \,\mathrm{d}s = \int_c f^a n_a \,\mathrm{d}c \tag{3}$$

wo s das dem σ entsprechende Gebiet der Fläche ist und c ist die der Kurve γ auf der Fläche entsprechende Kurve. Dabei ist $\mathrm{d}s = \sqrt{(G)}\,\mathrm{d}\xi^1\,\mathrm{d}\xi^2$, wobei G die Determinante des Tensors g_{ab} ist, $\mathrm{d}c = g_{ab}\,\mathrm{d}\xi^a\,\mathrm{d}\xi^b$.

Es sei der Vektor f_a auf der Fläche potentiell: $f_a = \partial\omega/\partial\xi^a$. Dann folgt von (3)

$$\iint_s g^{ab}\,\nabla_b \frac{\partial\omega}{\partial\xi^a}\,\mathrm{d}s = \int_c g^{ab}\,\frac{\partial\omega}{\partial\xi^a}\,n_b\,\mathrm{d}c$$

oder

$$\iint_s \Delta_{\mathcal{S}}\omega \,\mathrm{d}s = \int_c \frac{\partial\omega}{\partial n}\,\mathrm{d}c \tag{4}$$

wo $\Delta_{\mathcal{S}}$ der Laplace Operator auf der Fläche $\mathcal{S}$ ist[2]) und $\partial/\partial n$ ist die Ableitung in der Richtung der Normale n_b.

Bemerkung 1. Wenn ω eine harmonische Funktion auf der Fläche[3]) ist, folgt von (4) $\int_c (\partial\omega/\partial n)\,\mathrm{d}c = 0$.

Legt man in (3) $f_a = v(\partial\omega/\partial\xi^a)$, wo v eine mit ihren partiellen Ableitungen 2. Ordnung stetige Funktion im s ist, dann bekommt man

$$\iint_s g^{ab}\,\nabla_b\left(v\,\frac{\partial\omega}{\partial\xi^a}\right)\mathrm{d}s = \int_c v n^a\,\frac{\partial\omega}{\partial\xi^a}\,\mathrm{d}c$$

[2]) Siehe I, § 1.
[3]) Siehe II, § 1.

oder

$$(5) \qquad \iint_s \left(v \, \Delta_{\mathscr{G}} \omega + g^{ab} \frac{\partial v}{\partial \xi^a} \frac{\partial \omega}{\partial \xi^b} \right) \mathrm{d}s = \int_c v \frac{\partial \omega}{\partial n} \, \mathrm{d}c$$

Umtauscht man da ω und v und subtrahiert von (5), bekommt man

$$(6) \qquad \iint_s (v \, \Delta_{\mathscr{G}} \omega - \omega \, \Delta_{\mathscr{G}} v) \, \mathrm{d}s = \int_c \left(v \frac{\partial \omega}{\partial n} - \omega \frac{\partial v}{\partial n} \right) \mathrm{d}c$$

Bemerkung 2. Die Formeln (4) und (6) sind den bekannten Greenschen Formeln in der Ebene analog; anstatt des Laplace Operators in der Ebene steht der Laplace Operator auf einer Fläche da.

2. DIE FUNKTION ALS EINE SUMME VON DREI POTENTIALEN AUF DER FLÄCHE MIT DEM METRISCHEN TENSOR $1, 0, g(r)\, h(\varphi)$

Es sei im E_3 eine Fläche gegeben und wir führen in dieser die Krummflächenpolarparameter r, φ ein. Der metrische Tensor der Fläche hat in diesen Parametern die Komponenten $1, 0, G(r, \varphi)$ wobei $\lim_{r \to 0} G(r, \varphi) = 0$ [4]) ist und die Laplace Gleichung auf der Fläche hat die Form[5])

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{G} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{1}{2G^2} \frac{\partial G}{\partial \varphi} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} = 0 \, .$$

Wir wollen auf der Fläche eine radiale Lösung der Gleichung (1) suchen, d.h. eine Lösung $R = R(r)$, die nur von r abhängt. Für R bekommen wir die Gleichung

$$(2) \qquad \frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial r} \frac{\partial R}{\partial r} = 0$$

deren Lösung aber die Funktion der beiden Parameter r, φ ist. Beschränkt man sich aber auf Flächen, bei denen $G(r, \varphi) = g(r)\, h(\varphi)$ ist, hat die Gleichung (2) die Form

$$g \frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}r} \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} = 0$$

Also eine radiale Lösung existiert und es ist $R = \int_{r_0}^{r} (c/\sqrt{[g(t)]}) \, \mathrm{d}t$ (c, r_0 sind Konstanten). Wählt man da $c = -1$, ist

$$(3) \qquad R = -\int_{r_0}^{r} \frac{1}{\sqrt{g(t)}} \, \mathrm{d}t$$

Da $\lim_{r \to 0} g(r) = 0$ ist, ist auch $\lim_{r \to 0} (1/\sqrt{g(r)}) = +\infty$.

---

[4]) Siehe [3] (Literaturverzeichnis siehe in I).

[5]) Siehe I, II.

Bemerkung 1. Ist die Fläche eine Ebene, dann ist $g(r) = r^2$, $h(\varphi) = 1$ und die radiale Lösung ist $R = \log(r_0/r)$; dabei ist $\lim_{r\to 0} r\, R(r) = 0$.

In Analogie mit der Ebene setzen wir voraus, dass

$$(4) \qquad \lim_{r\to 0} R(r) = +\infty\ ^{6)}, \quad \lim_{r\to 0} (\sqrt{g(r)})\, R(r) = 0$$

Bemerkung 2. Die Bedingungen (4) sind z.B. auf Flächen mit einer konstanten Gaussschen Krümmung K erfüllt, wo $G(r, \varphi) = (1/K) \sin^2 (\sqrt{K})\, r$.

Auf der Fläche $\mathscr{S}$ mit dem metrischen Tensor $1, 0, g(r)\, h(\varphi)$ leiten wir (so wie in der Ebene) die Grundformel ab, die die Funktion ω als eine Summe von drei Potentialen darstellt[7]; diese Flächen sind nämlich mit der Ebene konform[8]) und man kann also für diese die Formel (6) vom § 1 benützen.

Es sei auf der Fläche $\mathscr{S}$ das Gebiet $s - k$, wo k die geodätische Kreisfläche mit dem Mittelpunkt P (wo $r = 0$) und dem Radius ϱ ist, gegeben, wobei $k \subset s$ ist. Nach der Formel (6) vom § 1, die man für das Gebiet $s - k$ [9]) benützt, wobei man $v = R$ legt, bekommt man

$$-\iint_{s-k} R\, \Delta_{\mathscr{S}}\omega \,\mathrm{d}s = \int_c \left[\omega \frac{\partial R}{\partial n} - R \frac{\partial \omega}{\partial n}\right] \mathrm{d}c + \int_l \left[\omega \frac{\partial R}{\partial n} - R \frac{\partial \omega}{\partial n}\right] \mathrm{d}l$$

wo l die Grenze der Kreisfläche k ist. (Dabei sind alle Ausdrücke in den Koordinaten r, φ ausgedrückt.) Nachdem auf dem geodätischen Kreis l der Vektor n_a die Richtung des geodätischen Radius hat, ist da $\partial R/\partial n = -\partial R/\partial r$, d.h. $\partial R/\partial n|_l = 1/\sqrt{[g(\varrho)]}$ und also

$$\int_l \omega \frac{\partial R}{\partial n} \mathrm{d}l = \int_0^{2\pi} \omega(\varrho, \varphi) \frac{1}{\sqrt{g(\varrho)}} \sqrt{[g(\varrho)\, h(\varphi)]}\, \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \omega(\varrho, \varphi) \sqrt{[h(\varphi)]}\, \mathrm{d}\varphi =$$
$$= \omega(\varrho, \bar{\varphi}) \int_0^{2\pi} \sqrt{[h(\varphi)]}\, \mathrm{d}\varphi$$

wo $\bar{\varphi} \in \langle 0, 2\pi \rangle$ ist. Weiter ist

$$\int_l R \frac{\partial \omega}{\partial n} \mathrm{d}l = -\int_0^{2\pi} R(\varrho) \frac{\partial \omega}{\partial r} (\varrho, \varphi) \sqrt{[g(\varrho)\, h(\varphi)]}\, \mathrm{d}\varphi =$$
$$= -R(\varrho) \frac{\partial \omega}{\partial r} (\varrho, \bar{\bar{\varphi}}) \sqrt{[g(\varrho)\, h(\bar{\bar{\varphi}})]}\, 2\pi$$

---

[6]) Siehe auch II, § 2, wo die gleiche Voraussetzung steht.

[7]) Siehe [1].

[8]) Siehe II, § 4.

[9]) Die Formeln (6) kann man so wie in der Ebene für mehrfach zusammenhängende Gebiete benützen.

wo $\bar{\bar{\varphi}} \in \langle 0, 2\pi \rangle$ ist. Wir haben so

$$- \iint_{s-k} R \Delta_{\mathscr{S}} \omega \, \mathrm{d}s = \int_c \left(\omega \frac{\partial R}{\partial n} - R \frac{\partial \omega}{\partial n} \right) \mathrm{d}c + $$

$$+ \omega(\varrho, \bar{\varphi}) \int_0^{2\pi} \sqrt{[h(\varphi)]} \, \mathrm{d}\varphi + 2\pi R(\varrho) \sqrt{[g(\varrho)]} \sqrt{[h(\bar{\bar{\varphi}})]} \frac{\partial \omega}{\partial r} (\varrho, \bar{\bar{\varphi}})$$

Übergeht man da zu einem Grenzwert für $\varrho \to 0$, bekommt man

$$\omega(P) = - \frac{1}{\int_0^{2\pi} \sqrt{[h(\varphi)]} \, \mathrm{d}\varphi} \left(\iint_s R \Delta_{\mathscr{S}} \omega \, \mathrm{d}s + \int_c \omega \frac{\partial R}{\partial n} \mathrm{d}c - \int_c R \frac{\partial \omega}{\partial n} \mathrm{d}c \right) \tag{5}$$

nachdem nach (4)

$$\lim_{\varrho \to 0} \omega(\varrho, \bar{\bar{\varphi}}) \int_0^{2\pi} \sqrt{[h(\varphi)]} \, \mathrm{d}\varphi = \omega(P) \int_0^{2\pi} \sqrt{[h(\varphi)]} \, \mathrm{d}\varphi$$

$$\lim_{\varrho \to 0} R(\varrho) \sqrt{[g(\varrho)]} \sqrt{[h(\bar{\bar{\varphi}})]} \frac{\partial \omega}{\partial r} (\varrho, \bar{\bar{\varphi}}) = 0$$

ist. Bezeichnet man in (5):

$$- \frac{1}{\int_0^{2\pi} \sqrt{[h(\varphi)]} \, \mathrm{d}\varphi} \Delta_{\mathscr{S}} \omega = \lambda \,, \quad \frac{1}{\int_0^{2\pi} \sqrt{[h(\varphi)]} \, \mathrm{d}\varphi} \frac{\partial \omega}{\partial n} = \mu \,, \quad - \frac{1}{\int_0^{2\pi} \sqrt{[h(\varphi)]} \, \mathrm{d}\varphi} \omega = \nu$$

kann man (5) in der Form

$$\omega(P) = \iint_s \lambda R \, \mathrm{d}s + \int_c \mu R \, \mathrm{d}c + \int_c \nu \frac{\partial R}{\partial n} \mathrm{d}c \tag{6}$$

schreiben. Das erste Integral in (6) wird Flächenpotential mit der Dichte λ, das zweite Potential der einfachen Schichte mit der Dichte μ, das dritte Potential der Doppelschichte mit der Dichte ν auf der Fläche $\mathscr{S}$ genannt.

3. DIE GREENSCHE FUNKTION

So wie in der Ebene[10]) kann man auf Grund der Formel (5) vom § 2 und der Formel (6) vom § 1 in die Randwertaufgabe auf der Fläche $\mathscr{S}$ mit dem metrischen Tensor

---

[10]) Siehe [1].

1, 0, $g(r)\,h(\varphi)$ die Greenschen Funktionen einführen. Ist die Funktion v in der Formel (6) vom § 1 harmonisch auf $\mathcal{S}$, bekommt man

$$(1) \qquad 0 = \int_c \left(v \frac{\partial \omega}{\partial n} - \omega \frac{\partial v}{\partial n} \right) \mathrm{d}c - \iint_s v \Delta_{\mathcal{S}} \omega \, \mathrm{d}s$$

Durch addieren der Gleichungen (1) und (5) vom § 2 bekommt man

$$(2) \qquad \omega(P) = - \iint_s M \Delta_{\mathcal{S}} \omega \, \mathrm{d}s + \int_c \left(M \frac{\partial \omega}{\partial n} - \omega \frac{\partial M}{\partial n} \right) \mathrm{d}c$$

wo

$$(3) \qquad M = \frac{1}{\int_0^{2\pi} \sqrt{[h(\varphi)]} \, \mathrm{d}\varphi} R + v$$

ist.

Es sei auf der Fläche $\mathcal{S}$ die Dirichletsche Aufgabe für die Poissonche Gleichung gegeben: In einem beschränkten Gebiet s mit der Grenze c auf $\mathcal{S}$ ist eine Funktion ω zu finden, die stetig im $\bar{s}$ ist, die im s stetige partielle Ableitungen 2. Ordnung bestitzt und die da der Poisson Gleichung: $\Delta_{\mathcal{S}} \omega = -p$ [11]) genügt, wobei $\omega|_c = f$ gilt. Wir setzen voraus, dass f auf c und p auf $\bar{s}$ stetig ist.

Greensche Funktion unserer Aufgabe wird die Funktion (3) genannt, wo v eine beschränkte harmonische Funktion auf s ist und wobei $M|_c = 0$ gilt.

Die Lösung ist mit der Formel

$$\omega(P) = \iint_s M p \, \mathrm{d}s - \int_c f \frac{\partial M}{\partial n} \mathrm{d}c$$

gegeben. Speziell für die Laplace Gleichung auf $\mathcal{S}$ ist

$$\omega(P) = - \int_c f \frac{\partial M}{\partial n} \mathrm{d}c$$

Es sei auf der Fläche $\mathcal{S}$ die Neumannsche Aufgabe für die Poissonche Gleichung gegeben: In einem beschränkten Gebiet s mit der Grenze c auf $\mathcal{S}$ ist eine Funktion ω zu finden, die mit ihren partiellen Ableitungen 1. Ordnung stetig im $\bar{s}$ ist, die im s stetige partielle Ableitungen 2. Ordnung besitzt und die da der Poissongleichung auf $\mathcal{S}$ genügt, wobei $(\partial \omega / \partial n)|_c = f$ ist. Wir setzen voraus, dass f stetig auf c ist und die Bedingung $\int_c f \, \mathrm{d}c = 0$ erfüllt, p ist stetig auf $\bar{s}$. (Von der Formel (4) vom § 1 folgt nämlich: $\int_c f \, \mathrm{d}c = \int_c (\partial \omega / \partial n) \, \mathrm{d}c = \iint_s \Delta_{\mathcal{S}} \omega \, \mathrm{d}s = 0$).

[11]) Siehe I, § 1.

Greensche Funktion dieser Aufgabe wird die Funktion (3) genannt, wo v eine beschränkte harmonische Funktion auf s ist, wobei $\partial M/\partial n)|_c = \kappa$ (= konst.).

Die Lösung ist durch die Formel

$$\omega(P) = \iint_s Mp \, \mathrm{d}s + \int_c Mf \, \mathrm{d}c + K$$

gegeben, wo $K = -\kappa \int_c \omega \, \mathrm{d}c$. Speziell für die Laplace Gleichung auf $\mathscr{S}$ ist

$$\omega(P) = \int_c Mf \, \mathrm{d}c + K$$

Anschrift des Verfassers: Praha 1, Malostranské nám. 25 (Matematicko-fysikální fakulta KU)

Výtah

ŘEŠENÍ DIRICHLETOVA A NEUMANNOVA PROBLÉMU PRO POISSONOVU ROVNICI NA PLOCHÁCH POMOCÍ GREENOVY FUNKCE

JIŘÍ ŠTĚPÁNEK, Praha

V článku je přenesen Greenův vzorec z roviny na plochy konformní s rovinou:

$$\iint_c \nabla_a f^a \, \mathrm{d}s = \int_c f^a n_a \, \mathrm{d}c$$

(s oblast na ploše, c její hranice, ∇_a kovariantní derivace). Adaptací důkazů z roviny jsou pak přeneseny další Greenovy vzorce na tyto plochy.

Na ploše $\mathscr{S}$ s metrickým tensorem $1, 0, g(r)\, h(\varphi)$ je pomocí radiálního řešení $R = -\int_{r_0}^{r} g^{-1/2}(t) \, \mathrm{d}t$ Laplaceovy rovnice na $\mathscr{S}$ zavedena Greenova funkce u Poissonovy rovnice

$$M = \frac{1}{\int_0^{2\pi} \sqrt{[h(\varphi)]} \, \mathrm{d}\varphi} R + v$$

(v harmonická na $\mathscr{S}$). Řešení Dirichletova a Neumannova problému na ploše je pak vyjádřeno (podobně jako v rovině) v integrálním tvaru.

Резюме

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ И НЕЙМАННА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА НА ПОВЕРХНОСТЯХ ПРИ ПОМОЩИ ФУНКЦИИ ГРИНА

ЙИРЖИ ШТЕПАНЕК (Jiří Štěpánek), Прага

В статье перенесена формула Грина из плоскости на поверхности, конформные с плоскостью:

$$\iint_s \nabla_a f^a \, \mathrm{d}s = \int_c f^a n_a \, \mathrm{d}c$$

(s — область на поверхности, c — ее граница, ∇_a — ковариантная производная). Приспособляя доказательства из плоскости, можем перенести и другие формулы Грина на эти поверхности.

На поверхности $\mathscr{S}$ с метрическим тензором $1, 0, g(r)\, h(\varphi)$ вводится при помощи радиального решения $R = -\int_{r_0}^{r} g^{-1/2}(t)\, \mathrm{d}t$ уравнения Лапласа на $\mathscr{S}$ функция Грина для уравнения Пуассона

$$M = \frac{1}{\int_0^{2\pi} \sqrt{[h(\varphi)]}\, \mathrm{d}\varphi} R + v$$

(v гармоническая на $\mathscr{S}$). Тогда решение задачи Дирихле и Нейманна на поверхности выражается (подобно тому, как в плоскости) в интегральной форме.