Josef Täuber

Über Frenet-Polynome die einer Weltlinie beigefügt sind

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 92 (1967), No. 4, 454--458

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117611

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 92 (1967), Praha

ÜBER FRENET-POLYNOME DIE EINER WELTLINIE BEIGEFÜGT SIND

JOSEF TÄUBER, Timişoara

(Eingegangen am 28. Mai 1966)

Die Frenetschen Formeln einer Weltlinie wurden von F. NOŽIČKA [1] eingeführt. Nach V. PETRŮV [2] erhalten diese Formeln eine einfachere Form, wenn der Parameter τ in $\sigma = \sigma(\tau) = 1/\mu c \int_0^\tau P(\varrho)\, d\varrho$ übergeht.

Bezeichnet man mit

$$k_1^\alpha = \frac{i}{c} i_1^\alpha\,; \quad k_2^\alpha = i_2^\alpha\,; \quad k_3^\alpha = i_3^\alpha\,; \quad k_4^\alpha = i_4^\alpha\,; \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4;\ i^2 = -1)$$

und mit $q = Q/P$, $r = R/P$ so erhalten die Frenetschen Formeln folgende Form:

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} \frac{d\bar{k}_1}{d\sigma} &= i\bar{k}_2\,; & \frac{d\bar{k}_2}{d\sigma} &= -i\bar{k}_1 + q\bar{k}_3\,; \\ \frac{d\bar{k}_3}{d\sigma} &= -q\bar{k}_2 + r\bar{k}_4\,; & \frac{d\bar{k}_4}{d\sigma} &= -r\bar{k}_3\,, \end{aligned}$$

wobei $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3, \bar{k}_4$ orthogonale Einheitsvektoren sind.

1. In einer vorhergehenden Arbeit [6] wurden die Darboux-Ribaucourschen Polynome eingeführt. Ähnlich kann man auch die Frenetschen Polynome einer Weltlinie einführen.

Zu diesem Zweck nimmt man die Taylorsche Reihenentwicklung des Einheitsvektors $\bar{k}_1$ im Punkte $P(\sigma = a)$ an, aus der man die ersten p-Glieder beibehält. Bezeichnet man die so erhaltene partielle Summe mit

$$\text{(2)} \qquad \bar{k}_{1p}(\sigma) = \sum_{s=0}^{p} \frac{(\sigma - a)^s}{s!} \cdot \frac{d^s\bar{k}_1(a)}{d\sigma^s}$$

und zieht die Frenetschen Formeln in Betracht, so erhält man:

$$\text{(3)} \qquad \bar{k}_{1p}(\sigma) = A_p^1(\sigma)\,\bar{k}_1(a) + B_p^1(\sigma)\,\bar{k}_2(a) + C_p^1(\sigma)\,\bar{k}_3(a) + D_p^1(\sigma)\,\bar{k}_4(a)\,.$$

Die Funktionen $A_p^1(\sigma)$, $B_p^1(\sigma)$, $C_p^1(\sigma)$, $D_p^1(\sigma)$ sind Polynome vom Grade p in bezug auf σ und ihre Koeffizienten sind ganze Funktionen von q und r und ihrer Ableitungen. Diese Polynome nennt man die erste Polynomgruppe von Frenet. Diese Bezeichnung wurde von A. TONOLO [7] eingeführt.

Zur Berechnung der Koeffizienten werden Rekursionsformeln abgeleitet.

Angenommen wird

$$
\begin{aligned}
A_p^1(\sigma) &= \sum_{s=0}^{p} \alpha_s^1(\sigma - a)^s \\
B_p^1(\sigma) &= \sum_{s=0}^{p} \beta_s^1(\sigma - a)^s \\
C_p^1(\sigma) &= \sum_{s=0}^{p} \gamma_s^1(\sigma - a)^s \\
D_p^1(\sigma) &= \sum_{s=0}^{p} \delta_s^1(\sigma - a)^s
\end{aligned}
\tag{4}
$$

als die erste Polynomgruppe von Frenet.

Nimmt man $s = 0$, so erhält man aus (2) und (3) folgende Beziehung:

$$\bar{k}_{10}(\sigma) = \bar{k}_1(a) = A_0^1(\sigma)\,\bar{k}_1(a) + B_0^1(\sigma)\,\bar{k}_2(a) + C_0^1(\sigma)\,\bar{k}_3(a) + D_0^1(\sigma)\,\bar{k}_4(a)\,.$$

Zieht man noch (4) in Betracht, so erhält man:

$$\alpha_0^1 = 1\,,\quad \beta_0^1 = 0\,,\quad \gamma_0^1 = 0\,,\quad \delta_0^1 = 0\,. \tag{5}$$

Im benachbarten Punkte $P'(\sigma)$ von $P(\sigma = a)$ werden auch die Koeffizienten der Frenetschen Polynome Funktionen von σ sein.

Identifiziert man nun die Koeffizienten von (2) und (3) desselben Grades im Punkte P', so erhält man:

$$\frac{1}{s!}\,\frac{\mathrm{d}^s\bar{k}_1(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma^s} = \alpha_s^1(\sigma)\,\bar{k}_1(\sigma) + \beta_s^1(\sigma)\,\bar{k}_2(\sigma) + \gamma_s^1(\sigma)\,\bar{k}_3(\sigma) + \delta_s^1(\sigma)\,\bar{k}_4(\sigma) \tag{6}$$

und

(7)

$$\frac{1}{(s+1)!}\,\frac{\mathrm{d}^{s+1}k_1(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma^{s+1}} = \alpha_{s+1}^1(\sigma)\,\bar{k}_1(\sigma) + \beta_{s+1}^1(\sigma)\,\bar{k}_2(\sigma) + \gamma_{s+1}^1(\sigma)\,\bar{k}_3(\sigma) + \delta_{s+1}^1(\sigma)\,\bar{k}_4(\sigma).$$

Die Beziehung (6) wird einmal differenziert und die ersten Ableitungen von $\bar{k}_1$, $\bar{k}_2$,

$\bar{k}_3, \bar{k}_4$ werden aus den Formeln von Frenet eingesetzt. Identifiziert man das so erhaltene Resultat mit (7) so erhält man:

$$
(8)\qquad
\begin{aligned}
\alpha_{s+1}^1(\sigma) &= \frac{1}{s+1}\left[\,\dot{\alpha}_s^1(\sigma) - i\,\beta_s^1(\sigma)\right] \\
\beta_{s+1}^1(\sigma) &= \frac{1}{s+1}\left[i\,\alpha_s^1(\sigma) + \dot{\beta}_s^1(\sigma) - q(\sigma)\,\gamma_s^1(\sigma)\right] \\
\gamma_{s+1}^1(\sigma) &= \frac{1}{s+1}\left[\qquad q(\sigma)\,\beta_s^1(\sigma) + \dot{\gamma}_s^1(\sigma) - r(\sigma)\,\delta_s^1(\sigma)\right] \\
\delta_{s+1}^1(\sigma) &= \frac{1}{s+1}\left[\qquad\qquad r(\sigma)\,\gamma_s^1(\sigma) + \dot{\delta}_s^1(\sigma)\right]
\end{aligned}
$$

$$(s = 0, 1, 2, \ldots)\ \ (i^2 = -1)$$

wobei man die Ableitung in bezug auf σ mit einem Punkt über dem Buchstaben bezeichnet hat.

Wird in den Formeln (8) $\sigma = a$ gesetzt, dann fällt P' mit P zusammen, und folglich ergeben die Formeln (8) die Rekursionsformeln für die Koeffizienten der ersten Polynomgruppe von Frenet.

2. Geht man ähnlich mit den Einheitsvektoren $\bar{k}_2, \bar{k}_3, \bar{k}_4$ vor, so erhält man noch drei Gruppen von Frenetschen Polynomen, welche dieselben Eigenschaften wie die erste Gruppe aufweisen und ähnliche Rekursionsformeln für die Koeffizienten besitzen.

3. Durch das Einführen des Matrizenoperators

$$T_{s+1} = \frac{1}{s+1}\cdot\begin{bmatrix} \frac{d}{d\sigma} & -i & 0 & 0 \\ i & \frac{d}{d\sigma} & -q & 0 \\ 0 & q & \frac{d}{d\sigma} & -r \\ 0 & 0 & r & \frac{d}{d\sigma} \end{bmatrix};\quad (i^2 = -1)$$

und der Matrizen

$$K_s = \begin{bmatrix} \alpha_s^1 & \alpha_s^2 & \alpha_s^3 & \alpha_s^4 \\ \beta_s^1 & \beta_s^2 & \beta_s^3 & \beta_s^4 \\ \gamma_s^1 & \gamma_s^2 & \gamma_s^3 & \gamma_s^4 \\ \delta_s^1 & \delta_s^2 & \delta_s^3 & \delta_s^4 \end{bmatrix}$$

kann man die Rekursionsformeln der Koeffizienten in einer einfachen Matrizenrekursionsformel zusammenfassen.

Man kann leicht die folgende Beziehung

$$T_{s+1} \, . \, K_s = K_{s+1} \, ; \quad (s = 0, 1, 2, \ldots) \tag{9}$$

überprüfen, wobei K_0 die Einheitsmatrix ist und $\alpha_s^l, \beta_s^l, \gamma_s^l, \delta_s^l$ $(l = 1, 2, 3, 4)$ die Koeffizienten der vier Gruppen von Frenetschen Polynome bezeichnen. Die Beziehung (9) ist die Matrizenrekursionsformel der Koeffizienten.

4. Herr V. Petrův beschäftigt sich in seinen Arbeiten [2], [3], [4], [5] mit den Lösungen der Formeln von Frenet einer Weltlinie.

Die Frenetschen Polynome geben eine einheitliche Methode an, die beim Integrieren der Formeln von Frenet angewendet werden können, falls die Krümmungen ableitbare Funktionen sind. Diese Methode führt zu einer exakten oder zu einer approximativen Lösung, was aus der Formel (3) und ähnlichen Formeln ersichtlich ist. Mit Hilfe dieser Methode kann man fast alle Resultate der Arbeiten [3] und [4] ableiten. Ausserdem ermöglicht sie ein Integrieren der Formeln von Frenet, auch wenn die Krümmungen nicht konstant und klein sondern bloss ableitbare Funktionen sind.

Anschrift des Verfassers: B-dul M. Viteazul Nr. 1, Timişoara, R.S. România (Facultatea de mecanică).

Bibliographie

[1] *František Nožička:* Les formules de Frenet pour la géodesique dans la mécanique de Minkowski. Czechoslovak Math. Journal, *13 (88)*, (1963), 290—321.

[2] *Vladimir Petrův:* Zur Existenz der Lösung der Formeln von Frenet. Časopis pro pěstováni matematiky, *90* (1965), 1, 66—78.

[3] *V. Petrův:* Die Lösung der Formeln von Frenet im Falle konstanter Krümmungen. Aplik. math. *9* (1964), 4, 239—272.

[4] *V. Petrův:* Approximative Lösung der Formeln von Frenet im Falle „kleiner" Quotienten *Q/P*, *R/P*. Čas. pro. pěst. mat. *92* (1965), 2, 160—180.

[5] *V. Petrův:* Die Abschätzung des Fehlers der Lösung, welcher beim Einsetzen der Konstanten für die Quotienten *Q/P* und *R/P* in den Frenetschen Formeln ensteht. Aplik. mat. *9* (1964), 6, 435—442.

[6] *Iosif Täuber:* Asupra polinoamelor Darboux-Riboucour asociate unei curbe trasate pe o suprafaţa. Analele Universităţii din Timişoara. Seria Stiinţe Matematice-Fizice. Vol. *II*, 1964, 241—244.

[7] *Angelo Tonolo:* Sui polinomi di Frenet. Atti del Reale Instituto Veneto di Scienze, Lettere ed Artei. Tomo *XCVIII*, anno 1938—39, Venezia.

Výtah

O FRENETOVÝCH POLYNOMECH ASOCIOVANÝCH JEDNÉ SVĚTOČÁŘE

JOSEF TÄUBER, Timisoara

V práci jsou uvedeny Frentovy polynomy (4) asociované jedné světočáře. Ukazuje se, že koeficienty těchto mnohočlenů jsou racionálními funkcemi svých derivací. Koeficienty je možno vyčíslit pomocí rekurentního vzorce (9). Tyto mnohočleny se užívají při integrování Fenetových vzorců (1) pro světočáru.

Резюме

ОТНОСИТЕЛЬНО МНОГОЧЛЕНОВ ФРЕНЕ, АССОЦИРОВАННЫХ ОДНОЙ ЛИНИИ ВСЕЛЕННОЙ

ЙОСЕФ ТЕУБЕР (Josef Täuber), Тимисоара

В этой работе введены многочлены френе (4), ассоцированные одной линии вселенной. Показано, что коэффициенты этих многочленов являются рациональными функциями по отношению к их производным. Коэффициенты можно вычислить при помощи рекуррентного правила (9). Эты многочлены пользуются при интегрировании Формул френе (1) для линии вселенной.