Časopis pro pěstování matematiky

Karel Havlíček

Zur Konstruktion einer endlichen Ebene

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 95 (1970), No. 1, 71--75

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117686

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 95 (1970), Praha

ZUR KONSTRUKTION EINER ENDLICHEN EBENE

KAREL HAVLÍČEK, Praha

(Vorgelegt am 30. Mai 1969)

Dem Andenken an Prof. Dr. BOHUMIL BYDŽOVSKÝ *gewidmet.*

Die endliche projektive Ebene der Ordnung $n = 3$ enthält $n^2 + n + 1 = 13$ Punkte und 13 Geraden[1]), die nach Weglassung einer Geraden bekanntlich zur Konfiguration $(9_4, 12_3)$ oder zur affinen Ebene führt. Diese Konfiguration wird beispielsweise mit den Wendepunkten und den zugehörigen Inflexionsachsen einer elliptischen kubischen Kurve[2]) in der unendlichen projektiven Ebene π_∞ (über dem Körper der komplexen Zahlen) realisiert[3]). Vom Standpunkt der konstruktiven Geometrie ist interessant, daß dieselbe Konfiguration die Konstruktion einer projektiven Ebene der Ordnung $n = 4$ bietet.

Zu diesem Zweck bezeichnen wir mit x_1, x_2, x_3 die homogenen projektiven Koordinaten in π_∞. Macht man ein Wendedreiseit der elliptischen kubischen Kurve zum Koordinatendreieck, so erscheint die Gleichung dieser Kurve in der kanonischen Form Hesses

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + ax_1x_2x_3 = 0\,. \tag{1}$$

Ist a ein veränderlicher Parameter, so bekommen wir das bekannte syzygetische Büschel, dessen Basis 9 Wendepunkte W_i $(i = 1, 2, \ldots, 9)$ aller Kurven (1) bilden. Diese Punkte sind dann in diesem Koordinatensystem folgendermaßen bestimmt:

$$\begin{aligned} &W_1(\;0, -1, 1)\,, \quad W_2(\;0, -\alpha, 1)\,, \quad W_3(\;0, -\alpha^2, 1)\,, \\ &W_4(-1, \;0, 1)\,, \quad W_5(-\alpha, \;0, 1)\,, \quad W_6(-\alpha^2, \;0, 1)\,, \\ &W_7(-1, \;1, 0)\,, \quad W_8(-\alpha, \;1, 0)\,, \quad W_9(-\alpha^2, \;1, 0)\,. \end{aligned} \tag{2}$$

[1]) [3] S. 138, [7] S. 89—92, [9] S. 150.

[2]) Diese Terminologie nach [4] S. 476.

[3]) [8] S. 265; auch [5] S. 134.

Dabei ist $\alpha = \frac{1}{2}[-1 + \sqrt{(-3)}]$ eine dritte Wurzel von 1.[4]) Die Inflexionsachsen a_j (resp. b_j, c_j, d_j; $j = 1, 2, 3$), die das erste (resp. zweite, dritte, vierte) Wendedreiseit bilden, haben dann folgende Gleichungen:

(3)
$$
\begin{aligned}
&a_1 \equiv x_1 = 0\,, && a_2 \equiv x_2 = 0\,,\\
&a_3 \equiv x_3 = 0\,,\\
&b_1 \equiv x_1 + x_2 + x_3 = 0\,, && b_2 \equiv x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 = 0\,,\\
&b_3 \equiv x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha x_3 = 0\,,\\
&c_1 \equiv x_1 + x_2 + \alpha^2 x_3 = 0\,, && c_2 \equiv x_1 + \alpha^2 x_2 + x_3 = 0\,,\\
&c_3 \equiv \alpha^2 x_1 + x_2 + x_3 = 0\,,\\
&d_1 \equiv x_1 + x_2 + \alpha x_3 = 0\,, && d_2 \equiv x_1 + \alpha x_2 + x_3 = 0\,,\\
&d_3 \equiv \alpha x_1 + x_2 + x_3 = 0\,.
\end{aligned}
$$

Jede von diesen Geraden ist genau mit drei Wendepunkten W_i in π_∞ inzident, wie man sich ohne Mühe durch Substitution der Koordinaten (2) in die Gleichungen (3) überzeugen kann. Dabei ist jeder Punkt W_i mit vier von diesen Geraden inzident, was eben die Konfiguration $(9_4, 12_3)$ bildet.

Die Geraden (3) schneiden sich außer in den Punkten W_i noch in den Eckpunkten der zugehörigen Wendedreiseite. Bezeichnen wir mit A_j (resp. B_j, C_j, D_j) den Eckpunkt, welcher in dem ersten (resp. zweiten, dritten, vierten) Wendedreiseit der Geraden a_j (resp. b_j, c_j, d_j) gegenüberliegt. Die Koordinaten dieser Eckpunkte in dem oben gewählten Koordinatensystem sind:

(4)
$$
\begin{aligned}
&A_1(1, 0, 0)\,, && A_2(0, 1, 0)\,, && A_3(0, 0, 1)\,,\\
&B_1(1, 1, 1)\,, && B_2(\alpha, 1, \alpha^2)\,, && B_3(\alpha, \alpha^2, 1)\,,\\
&C_1(1, 1, \alpha)\,, && C_2(1, \alpha, 1)\,, && C_3(\alpha, 1, 1)\,,\\
&D_1(1, 1, \alpha^2)\,, && D_2(1, \alpha^2, 1)\,, && D_3(\alpha^2, 1, 1)\,.
\end{aligned}
$$

Diese 12 Punkte bilden mit den 9 Geraden (5) bekanntlich[5]) die zur Konfiguration der Wendepunkte (2) duale Konfiguration $(12_3, 9_4)$. Sie sind also mit den 9 Geraden w_i inzident, deren Gleichungen in der Ebene π_∞ lauten:

(5)
$$
\begin{aligned}
&w_1 \equiv -x_2 + x_3 = 0\,, && w_2 \equiv -\alpha x_2 + x_3 = 0\,, && w_3 \equiv -\alpha^2 x_2 + x_3 = 0\,,\\
&w_4 \equiv -x_1 + x_3 = 0\,, && w_5 \equiv -\alpha x_1 + x_3 = 0\,, && w_6 \equiv -\alpha^2 x_1 + x_3 = 0\,,\\
&w_7 \equiv -x_1 + x_2 = 0\,, && w_8 \equiv -\alpha x_1 + x_2 = 0\,, && w_9 \equiv -\alpha^2 x_1 + x_2 = 0\,.
\end{aligned}
$$

[4]) [2] S. 437—438, [12] S. 402.

[5]) Vgl. mit [12] S. 403.

Diese Geraden sind natürlich **nicht** mit den Wendepunkten (2) in der Ebene π_∞ inzident. Trotzdem können wir die Inzidenz definitorisch einführen und damit die ursprüngliche Inzidenz in π_∞ so ergänzen, daß die Gesamtheit der 21 Punkte (2) und (4) und 21 Geraden (3) und (5) eine endliche Ebene π_4 der Ordnung $n = 4$ bilden. (Die Ebene π_4 enthält bekanntlich $n^2 + n + 1 = 21$ Punkte und 21 Geraden, jede von diesen Geraden ist mit 5 Punkten inzident, und jeder von diesen Punkten ist mit 5 Geraden inzident. Dabei kann man jede Gerade als die Untermenge von 5 Punkten dieser Ebene erklären.)

Das Inzidenzschema in π_4 ist also teilweise durch das Inzidenzschema in unendlicher Ebene π_∞ definiert. Jede Gerade (3) ist schon in π_∞ mit 5 Punkten inzident, nämlich mit 3 Wendepunkten (2) und mit 2 Eckpunkten (4) des zugehörigen Wendedreiseites. Jede Gerade (5), zum Beispeil die Gerade w_i, ist dagegen nur mit 4 Eckpunkten (4) in π_∞ inzident; die diesen Eckpunkten gegenüberliegenden Seiten der Wendedreiseite gehen aber durch denselben Wendepunkt W_k, welcher der Geraden w_i in dieser Weise eineindeutig zugeordnet ist. Wir erklären das Paar w_i, W_k als Inzidenzpaar in π_4. So bekommen wir folgendes Beispiel der Ebene π_4:

Die 21 Punkte (resp. Geraden) in π_4 bezeichnen wir mit A_j, B_j, C_j, D_j, W_i (resp. a_j, b_j, c_j, d_j, w_i), wo $j = 1, 2, 3$, $i = 1, \ldots, 9$ ist. Das Inzidenzschema ist dann folgendermaßen definiert[6]):

$$
\begin{array}{lll}
(6) & a_1 = \{A_2, A_3, W_1, W_2, W_3\} & b_1 = \{B_2, B_3, W_1, W_4, W_7\} \\
 & a_2 = \{A_1, A_3, W_4, W_5, W_6\} & b_2 = \{B_1, B_3, W_2, W_6, W_8\} \\
 & a_3 = \{A_1, A_2, W_7, W_8, W_9\} & b_3 = \{B_1, B_2, W_3, W_5, W_9\} \\
 & c_1 = \{C_2, C_3, W_3, W_6, W_7\} & d_1 = \{D_2, D_3, W_2, W_5, W_7\} \\
 & c_2 = \{C_1, C_3, W_2, W_4, W_9\} & d_2 = \{D_1, D_3, W_3, W_4, W_8\} \\
 & c_3 = \{C_1, C_2, W_1, W_5, W_8\} & d_3 = \{D_1, D_2, W_1, W_6, W_9\} \\
 & w_1 = \{A_1, B_1, C_3, D_3, W_1\} & w_5 = \{A_2, B_2, C_1, D_3, W_6\} \\
 & w_2 = \{A_1, B_3, C_1, D_2, W_3\} & w_6 = \{A_2, B_3, C_3, D_1, W_5\} \\
 & w_3 = \{A_1, B_2, C_2, D_1, W_2\} & w_7 = \{A_3, B_1, C_1, D_1, W_7\} \\
 & w_4 = \{A_2, B_1, C_2, D_2, W_4\} & w_8 = \{A_3, B_3, C_2, D_3, W_9\} \\
\end{array}
$$

$$w_9 = \{A_3, B_2, C_3, D_2, W_8\}$$

Wirklich, jedes Paar von Punkten der Ebene π_4 ist hier genau in einem einzigen von diesen 5-Tupeln enthalten, und jede zwei von diesen 5-Tupeln haben genau einen ein-

[6]) Jede von diesen Geraden der Ebene π_4 ist dabei als 5-Tupel der Punkte dieser Ebene dargestellt.

zigen Punkt gemeinsam. Geometrisch gesagt: je zwei verschiedene Punkte haben genau eine Verbindungsgerade, und je zwei verschiedene Geraden schneiden sich genau in einem einzigen Punkt. Dabei liegen z. B. keine drei von den vier Punkten A_1, A_2, A_3, B_1 auf einer Gerade. Damit sind die Inzidenzaxiomen der projektiven Ebene[7]) erfüllt. Das Inzidenzschema (6) ist also ein Modell dieses Axiomensystems, also ein Modell der projektiven Ebene (der Ordnung $n = 4$).

Durch Anwendung des Dualitätsprinzips in der projektiven Ebene kann man auch jeden Punkt als 5-Tupel der mit ihm inzidierenden Geraden betrachten. Aus (6) bekommen wir dann eine gute Übersicht über die Geraden, welche durch einzelne Punkte in π_4 gehen:

$$
\begin{array}{ll}
A_1 = \{a_2, a_3, w_1, w_2, w_3\} & B_1 = \{b_2, b_3, w_1, w_4, w_7\} \\
A_2 = \{a_1, a_3, w_4, w_5, w_6\} & B_2 = \{b_1, b_3, w_3, w_5, w_9\} \\
A_3 = \{a_1, a_2, w_7, w_8, w_9\} & B_3 = \{b_1, b_2, w_2, w_6, w_8\} \\
\\
C_1 = \{c_2, c_3, w_2, w_5, w_7\} & D_1 = \{d_2, d_3, w_3, w_6, w_7\} \\
C_2 = \{c_1, c_3, w_3, w_4, w_8\} & D_2 = \{d_1, d_3, w_2, w_4, w_9\} \\
C_3 = \{c_1, c_2, w_1, w_6, w_9\} & D_3 = \{d_1, d_2, w_1, w_5, w_8\} \\
\\
W_1 = \{a_1, b_1, c_3, d_3, w_1\} & W_5 = \{a_2, b_3, c_3, d_1, w_6\} \\
W_2 = \{a_1, b_2, c_2, d_1, w_3\} & W_6 = \{a_2, b_2, c_1, d_3, w_5\} \\
W_3 = \{a_1, b_3, c_1, d_2, w_2\} & W_7 = \{a_3, b_1, c_1, d_1, w_7\} \\
W_4 = \{a_2, b_1, c_2, d_2, w_4\} & W_8 = \{a_3, b_2, c_3, d_2, w_9\} \\
\end{array}
$$
$$
W_9 = \{a_3, b_3, c_2, d_3, w_8\} \tag{7}
$$

Beide Schemas (6) und (7) sind isomorph ([9] S. 117), was durch die schlichte Abbildung $A_j \to a_j$, $B_j \to b_j$, $C_j \to c_j$, $D_j \to d_j$ (für $j = 1, 2, 3$), $W_1 \to w_1$, $W_2 \to w_3$, $W_3 \to w_2$, $W_4 \to w_4$, $W_5 \to w_6$, $W_6 \to w_5$, $W_7 \to w_7$, $W_8 \to w_9$, $W_9 \to w_8$ leicht bestätigt wird. Die zugehörigen Abbildungen dieses Modells auf die klassischen Fälle[8]) dieser Ebene wurden hier nicht untersucht.

Literaturverzeichnis

[1] *R. Baldus:* Zur Axiomatik der Geometrie IV. Über die Tragweite des Axioms von Pasch. Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften (1934), 145—161.

[2] *B. Bydžovský:* Úvod do algebraické geometrie. Praha 1948.

[7]) Vgl. mit [3] S. 115—116, [6] S. 72, [7] S. 89, [9] S. 115—116 usw.

[8]) [1] S. 151—153, [10] S. 322, [11] S. 350—351.

[3] *P. Dembowski:* Finite Geometries. Berlin—Heidelberg—New York 1968.

[4] Encyklopädie der Mathem. Wissenschaften III 2, 1. Leipzig 1903—15.

[5] *G. Fano:* Osservazioni su alcune „geometrie finite". Rend. Accad. Naz. Lincei (6), *26* (1937), 55—60, 129—134.

[6] *G. Hessenberg - J. Diller:* Grundlagen der Geometrie. Berlin 1967.

[7] *H. J. Ryser:* Combinatorial Mathematics. The Mathematical Association of America 1963.

[8] *B. Segre:* Lectures on modern Geometry. Roma 1961.

[9] *Л. А. Скорняков:* Проективные плоскости. Успехи матем. наук, 1951, 6, *6* (*46*), 112—154.

[10] *M. Steck:* Die Fundamentalsätze in der endlichen projektiven Geometrie des Veblensystems S (21/2/5). Monatshefte für Mathematik und Physik, *45* (1937), 320—331.

[11] *O. Veblen:* A System of Axioms for Geometry. Trans. Amer. Math. Soc., *5* (1904), 343—384.

[12] *J. Vojtěch:* Geometrie projektivní. Praha 1932.

Anschrift des Verfassers: Praha 8 - Karlín, Sokolovská 83 (Matematicko-fyzikální fakulta KU).