Václav Havel; Ivan Studnička
Ternärringe ohne Planaritätsbedingung

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 104 (1979), No. 1, 65--74

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/118000

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 104 (1979), Praha

TERNÄRRINGE OHNE PLANARITÄTSBEDINGUNG

VÁCLAV HAVEL und IVAN STUDNIČKA, Brno

(Eingegangen am 18. März 1977)

Unendliche Gewebe mit dem Grad gleich deren Ordnung sind mit affinen Ebenen eng verbunden, indem sich die algebraische Bestimmung solcher Gewebe von der algebraischen Bestimmung affiner Ebenen nur durch die sog. Planaritätsbedingung unterscheidet. Dabei entsteht eine Reihe von interessanten Fragen gerade um die betreffende Planaritätsbedingung. Einer solchen Frage ist der vorliegende Artikel gewidmet. Der Artikel besteht aus drei Paragraphen. In § 1 sind die Definitionen des Ternärringes und dessen bedeutsamer Sonderfälle und die Definition der sog. zulässigen Algebra angegeben. Der Zusammenhang der allgemeiner gefaßten zulässigen Algebren mit allgemeinen Geweben ist in den Arbeiten [2], [3] behandelt, während sich der vorliegende Artikel mit zulässigen Algebren befaßt, die nur in gewißem Maß spezialisiert sind, was gerade die Resultate erläßt, welche den Resultaten über affine Ebenen nahe liegen. Der Zusammenhang zwischen Ternärringen und zulässigen Algebren ist in Sätzen 1 – 3 von § 2 erörtert. Weiter sind in § 2 drei Konstruktionen angeführt, in welchen Ternärringe mit demselben zugeordneten Gewebe auftreten, bzw. die algebraische Ausdrückung der Einbettbarkeit des Gewebes in affine Ebene zur Frage kommt. In § 3 sind Beispiele der Ternärringe von 9 Typen im Sinn von § 1 konstruiert. Der geometrische Sinn von einzelnen algebraischen Identitäten und tiefere Fragen der Einbettbarkeit der behandelten Gewebe in affine Ebenen sollen den Gegenstand weiterer Untersuchungen bilden.

1. DEFINITION DES TERNÄRRINGES UND DER ZULÄSSIGEN ALGEBRA

Für die Zwecke des vorliegenden Artikels verstehen wir unter einem *Ternärring* das Quadrupel $(S, T, 0, 1)$, wo S eine mindestens zweielementige Menge ist, T eine ternäre Operation auf S und $0 \neq 1$ zwei ausgezeichnete Elemente aus S, so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

(a) $T(0, b, c) = T(a, 0, c) = c \quad \forall a, b, c \in S$,

(b) $T(a, 1, 0) = a \quad \forall a \in S$,

(c) $\#\{v \in S \mid T(a, b, v) = d\} = 1 \quad \forall a, b, d \in S,$

(d) $\#\{x \in S \mid T(x, b_1, c_1) = T(x, b_2, c_2)\} = 1 \quad \forall b_1, c_1, c_2 \in S;\ b_1 \neq b_2.$

Ein Ternärring $(S, T, 0, 1)$ heißt *planar* (*nichtplanar*), wenn die sog. *Planaritätsbedingung*

(e) $\#\{(u, v) \in S^2 \mid T(a_1, u, v) = d_1,\ T(a_2, u, v) = d_2\} = 1 \quad \forall a_1, d_1, a_2, d_2 \in S;$
$a_1 \neq a_2$

erfüllt ist (nicht erfüllt ist).

Ist $\mathscr{T} = (S, T, 0, 1)$ ein Ternärring, dann definieren wir binäre Operationen $+_{\mathscr{T}}, \cdot_{\mathscr{T}}$ auf S durch

$$a +_{\mathscr{T}} c := T(a, 1, c) \quad \forall a, c \in S,$$

$$a \cdot_{\mathscr{T}} c := T(a, b, 0) \quad \forall a, b \in S.$$

Ein Ternärring $(S, T, 0, 1)$ heißt *linear* (*nichtlinear*), falls die sog. *Linearitätsbedingung*

$$T(a, b, c) = a \cdot_{\mathscr{T}} b +_{\mathscr{T}} c \quad \forall a, b, c \in S$$

erfüllt ist (nicht erfüllt ist).

Ein Ternärring $\mathscr{T} = (S, T, 0, 1)$ heiße hier a) eine *kartesische Gruppe*, falls $\mathscr{T}$ linear und $+_{\mathscr{T}}$ assoziativ ist, b) ein *Rechtsquasikörper*, bzw. *Linksquasikörper*, falls eine kartesische Gruppe ist, welche die Rechtsdistributivität

$$a \cdot_{\mathscr{T}} (b +_{\mathscr{T}} c) = a \cdot_{\mathscr{T}} b +_{\mathscr{T}} a \cdot_{\mathscr{T}} c \quad \forall a, b, c \in S,$$

bzw. die Linksdistributivität

$$(a +_{\mathscr{T}} b) \cdot_{\mathscr{T}} c = a \cdot_{\mathscr{T}} c +_{\mathscr{T}} b \cdot_{\mathscr{T}} c \quad \forall a, b, c \in S$$

befriedigt, c) ein *Rechtsfastkörper*, bzw. *Linksfastkörper*, falls $\mathscr{T}$ ein Rechtsquasikörper mit assoziativer Operation $\cdot_{\mathscr{T}}$, bzw. ein Linksquasikörper mit assoziativer Operation $\cdot_{\mathscr{T}}$ ist, d) ein *Semikörper*, falls $\mathscr{T}$ gleichzeitig ein Linksquasikörper und Rechtsquasikörper ist. Ein Ternärkörper $\mathscr{T} = (S, T, 0, 1)$ heißt *erster*, bzw. *zweiter Art*, falls $(S, \cdot_{\mathscr{T}})$ eine Quasigruppe ist, bzw. falls $(S, \cdot_{\mathscr{T}})$ keine Quasigruppe ist.

Weiter wollen wir folgende Typen für Ternärringe einführen: nichtplanarer Rechtsfastkörper erster Art = Ternärring des Typs $\mathrm{I}_{(1)}$, nichtplanarer Semikörper zweiter Art = Ternärring des Typs $\mathrm{II}_{(2)}$, nichtplanarer Rechtsquasikörper i-ter Art, welcher kein Rechtsfastkörper und kein Semikörper ist = Ternärring des Typs III R_i (für $i \in \{1, 2\}$), nichtplanarer Linksquasikörper zweiter Art, welcher kein Linksfastkörper und kein Semikörper ist = Ternärring des Typs III $\mathrm{L}_{(2)}$, nichtplanare kartesische Gruppe i-ter Art, welche kein Linksquasikörper und kein Rechtsquasikörper ist = = Ternärring des Typs IV_i (für $i \in \{1, 2\}$), nichtplanarer nichtlinearer Ternärring

i-ter Art, welcher keine kartesische Gruppe ist = Ternärring des Typs V_i) für $i \in \{1, 2\}$).

Eine Algebra $(S, (\sigma_\iota)_{\iota \in I}, (+_\iota)_{\iota \in I})$, wo S, I Mengen sind (die Grundmenge und die Indexmenge) mit $\# S = \# I + 1 \geqq 2$, heißt hier *zulässig*, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

(α) Für jedes $\iota \in I$ ist σ_ι eine Permutation von S, wobei ein Element $0 \in S$ existiert (*Nullelement* genannt von S), so daß $0^{\sigma_\iota} = 0$ unabhängig von ι gilt.

(β) Es existiert ein Index $\iota_1 \in I$ (*ausgezeichneter Index* genannt), so daß $\sigma_{\iota_1} = \mathrm{id}_S$.

(γ) Für jedes $\iota \in I$ ist $(S, +_\iota)$ eine Quasigruppe, wobei $0 +_\iota x = x +_\iota 0 = x$ $\forall x \in S$.

(δ) Für jedes $\alpha, \beta \in I$; $\alpha \neq \beta$ und jedes $b_1, b_2 \in S$ ist $\#\{x \in S \mid x^{\sigma_\alpha} +_\alpha b_1 = x^{\sigma_\beta} +_\beta b_2\} = 1$.

Bemerken wir, daß für $\# I = 1$ geht die zulässige Algebra in eine Loop über.

2. TERNÄRRINGE KONTRA ZULÄSSIGE ALGEBREN

Satz 1. *Ist $\mathcal{T} = (S, T, 0, 1)$ ein Ternärring und λ bijektive Abbildung von $S \setminus \{0\}$ auf eine Menge, dann ist eine zulässige Algebra $\mathcal{A}^{\mathcal{T},\lambda} := (S^{\mathcal{T},\lambda}, (\sigma^{\mathcal{T},\lambda})_{\iota \in I^{\mathcal{T},\lambda}}, (+_\iota^{\mathcal{T},\lambda})_{\iota \in I^{\mathcal{T},\lambda}})$ mit Nullelement 0 und mit ausgezeichnetem Index 1 kanonisch bestimmt, wobei $S^{\mathcal{T},\lambda} := S$; $I^{\mathcal{T},\lambda} := \{x^\lambda \mid x \in S \setminus \{0\}\}$; $\sigma_\iota^{\mathcal{T},\lambda} : S \to S$, $x \mapsto T(x, \iota, 0)$ $\forall \iota \in I^{\mathcal{T},\lambda}$; $a^{\sigma_\iota^{\mathcal{T},\lambda}} +_\iota^{\mathcal{T},\lambda} c := T(a, \iota^{\lambda^{-1}}, c)$ für jedes $a, c \in S$ und jedes $\iota \in I^{\mathcal{T},\lambda}$ ist.*

Satz 2. *Ist $\mathcal{A} = (S, (\sigma_\iota)_{\iota \in I}, (+_\iota)_{\iota \in I})$ eine zulässige Algebra mit Nullelement 0 und ausgezeichnetem Index ι_1 und ist $\varrho : I \to S \setminus \{0\}$ eine bijektive Abbildung, dann ist ein Ternärring $\mathcal{T}_{\mathcal{A},\varrho} := (S_{\mathcal{A},\varrho}, T_{\mathcal{A},\varrho}, 0_{\mathcal{A},\varrho}, 1_{\mathcal{A},\varrho})$ kanonisch bestimmt, wobei*

$$S_{\mathcal{A},\varrho} := S\,; \quad 0_{\mathcal{A},\varrho} := 0\,; \quad 1_{\mathcal{A},\varrho} := \iota_1^\varrho\,; \quad T(a, b, c) := a^{\sigma_{b^{\varrho^{-1}}}} +_{b^{\varrho^{-1}}} c$$

für jedes $a, b, c \in S$ mit $b \neq 0$; $T(a, 0, c) := c$ für jedes $a, c \in S$ ist.

Satz 3. *Ist $\mathcal{T} = (S, T, 0, 1)$ ein Ternärring, dann ist*

$$\mathcal{T}_{\mathcal{A}^{\mathcal{T},\mathrm{id}_{S \setminus \{0\}}}, \mathrm{id}_{S \setminus \{0\}}} = \mathcal{T}\,.$$

Ist $\mathcal{A} = (S, (\sigma_\iota)_{\iota \in I}, (+_\iota)_{\iota \in I})$ eine zulässige Algebra mit Nullelement 0 und ist $\varrho : I \to S \setminus \{0\}$ eine bijektive Abbildung, dann ist $\mathcal{A}^{\mathcal{T}_{\mathcal{A},\varrho},\varrho^{-1}} = \mathcal{A}$.

B e w e i s des Satzes 1. Aus der Bedingung (a), (d) für $\mathcal{T}$ folgt, daß für jedes $\iota \in S \setminus \{0\}$ die Abbildung σ_ι eine Permutation der Menge S ist mit $0^{\sigma_\iota} = 0$. Aus der Bedingung (b) für $\mathcal{T}$ folgt sofort $\sigma_1 = \mathrm{id}_S$. Aus der Definition von σ_ι und $+_\iota$ und aus den Bedingungen (a), (c), (d) für $\mathcal{T}$ folgt die Bedingung (γ) für $\mathcal{A}^{\mathcal{T}}$. Die Bedingung (δ) für $\mathcal{A}^{\mathcal{T}}$ ist dann schon die Folge der Bedingung (d) für $\mathcal{T}$. ■

Beweis des Satzes 2. Aus den Bedingungen (α), (γ) für $\mathscr{A}$ und aus der Definition von $T_{\mathscr{A},\varrho}$ folgen die Bedingungen (a), (c) für $\mathscr{T}_{\mathscr{A},\varrho}$. Aus der Bedingung ($\beta$) für $\mathscr{A}$ folgt die Bedingung (b) für $\mathscr{T}_{\mathscr{A},\varrho}$. Endlich folgt aus der Bedingung (δ) für $\mathscr{A}$ und aus der Definition von $T_{\mathscr{A},\varrho}$ die Bedingung (d) für $\mathscr{T}_{\mathscr{A},\varrho}$. ■

Beweis des Satzes 3. Es sei also $\mathscr{T}$ der gegebene Ternärring und ϱ eine Permutation der Menge $S \setminus \{0\}$. Aus der Definition von

$$\mathscr{A}^{\mathscr{T},\mathrm{id}_{S\setminus\{0\}}} \quad \text{und} \quad \mathscr{T}_{\mathscr{A}^{\mathscr{T},\mathrm{id}_{S\setminus\{0\}}},\,\mathrm{id}_{S\setminus\{0\}}}$$

folgt für jedes $a, b, c \in S$ mit $b \neq 0$ die Gleichung

$$T_{\mathscr{A}^{\mathscr{T},\mathrm{id}_{S\setminus\{0\}}}}(a, b, c) = a^{\sigma_b^{\mathscr{T},\mathrm{id}_{S\setminus\{0\}}}} +_b c = T(a, b, c),$$

während

$$T_{\mathscr{A}^{\mathscr{T},\mathrm{id}_{S\setminus\{0\}}},\,\mathrm{id}_{S\setminus\{0\}}}(a, 0, c) = c = T(a, 0, c)$$

für jedes $a, c \in S$ klar ist. Der erste Teil des Satzes 3 ist damit bewiesen. Zum Beweis des übrigen Teiles sei $\mathscr{A}$ die gegebene zulässige Algebra und ϱ die gegebene bijektive Abbildung von I auf $S \setminus \{0\}$. Nach den Definitionen von $\mathscr{T}_{\mathscr{A},\varrho}$ und $\mathscr{A}^{\mathscr{T}_{\mathscr{A},\varrho}}$ gilt für jedes $a, c \in S$ und jedes $\iota \in I$ die Gleichung

$$a^{\sigma_\iota} +_\iota c = T_{\mathscr{A},\varrho}(a, \iota^\varrho, c) = a^{\sigma_\iota^{\mathscr{T}_{\mathscr{A},\varrho}}} +_\iota^{\mathscr{T}_{\mathscr{A},\varrho}} c$$

und daraus folgt dann $\sigma_\iota = \sigma_\iota^{\mathscr{T}_{\mathscr{A},\varrho}}$, $+_\iota = +_\iota^{\mathscr{T}_{\mathscr{A},\varrho}}$ für jedes $\iota \in I$. ■

Aus den Ergebnissen der Arbeiten [2], [3] folgt, daß zulässige Algebren im Sinn von § 1 bei geeigneter Koordinatisierung gewißen Geweben entsprechen. Mit Rücksicht auf die Sätze 1–3 kann man dasselbe auch über Ternärringe im Sinn von § 1 (anstatt der zulässigen Algebren) sagen. In weiteren Bemerkungen werden wir einige Ternärringe betrachten, welche demselben Gewebe entsprechen und werden die Frage betreffen, wie man von solchen Geweben entscheiden kann, ob sie in affine Ebene eingebettet werden können, ohne daß neue eigentliche Punkte zugegeben sind.

Konstruktion 1. Es sei S eine nichtleere Menge mit ausgezeichnetem Element 0 und T eine ternäre Operation auf S, welche die Bedingungen (a), (c), (d) befriedigt. Weiter sei $\mathscr{N}_{\mathscr{T}} := (\mathscr{P}, \mathscr{L}, \in)$ der entsprechende Blockplan über $\mathscr{T}$, d. h. es sei $\mathscr{P} := S^2$ (Punktmenge), $\mathscr{L} := \{\{(x, y) \mid x = a\} \mid a \in S\} \cup \{\{(x, y) \mid y = T(x, u, v)\} \mid u, v \in S\}$ (Geradenmenge, wobei and der ersten Stelle die vertikalen Geraden mit Steigung ∞ und an der zweiten Stelle die schiefen, bzw. horizontalen Geraden mit Steigung $u \in S \setminus \{0\}$, bzw. mit Steigung 0 in Betracht kommen). Wählen wir ein Element $u_0 \in S \setminus \{0\}$ und bezeichnen mit f soeine Permutation der Menge S, für welche $x^f = T(x, u_0, 0)$ für jedes $x \in S$ ist. Dann definieren wir eine neue ternäre Operation T' auf S folgenderweise: $T'(x, u, v) := T(x^{f^{-1}}, u, v)$ $\forall x, u, v \in S$. Man kann leicht nachprüfen, daß $\mathscr{T}' = (S, T', 0, u_0)$ ein Ternärring ist und daß der Blockplan $\mathcal{N}_{\mathcal{T}'}$ isomorph mit $\mathcal{N}_{\mathcal{T}}$ ist. Und weil $\mathcal{N}_{\mathcal{T}'}$ bis auf Unanwesenheit der singulären Punkte und bis auf die Anordnung der Geradenbüschel (jedes soein Büschel besteht aus sämtlichen Geraden mit derselben Steigung) mit einem Gewebe betrachteter Art zusammenfällt, kann man sich bei der Konstruktion der Ternärringe im Sinn von § 1 auf die Konstruktion der Ternärgruppoide (S, T) mit ausgezeichnetem Element 0 begrenzen, welche die Bedingungen (a), (c), (d) erfüllen (also auf „Ternärringe ohne Einselement").

Konstruktion 2. Es sei $\mathcal{T} = (S, T, 0, 1)$ ein Ternärring und f eine Permutation der Menge S mit $0^f = 0$. Definieren wir eine neue ternäre Operation T' auf S, so daß $T'(x, u, v) = (T(x^f, u, v^f))^{f^{-1}}$ für jedes $x, u, v \in S$ ist. Dann ist auch $\mathcal{T}' = (S, T', 0, 1)$ ein Ternärring und $\mathcal{N}_{\mathcal{T}'}$ ist zu $\mathcal{N}_{\mathcal{T}}$ isomorph. Mit $\mathcal{T}$ linear ist auch $\mathcal{T}'$ linear. Zum Beweis bemerken wir, daß die Nachprüfung der Geltung der Bedingungen (a), (b), (c), (d) für $\mathcal{T}'$ nur als eine Routine verläuft, so daβ wir uns auf die zwei übrigbleibende Tatsachen (Isomorphismus zwischen $\mathcal{N}_{\mathcal{T}}$ und $\mathcal{N}_{\mathcal{T}'}$ und Erhaltung der Linearitätsbedingung) beschränken können. Nun sei $\bar{f}$ soeine Permutation der Menge S^2, bei welcher $(x, y)^{\bar{f}} = (x^f, y^f)$ für jedes $x, y \in S$ ist. Offensichtlich übergeht durch $\bar{f}$ jede Gerade $\{(x, y) \mid x = a\}$ mit $a \in S$ in $\{(x, y)^{\bar{f}} \mid x = a\} = \{(x, y) \mid x = a^f\}$, also in eine Gerade desselben Büschels. Weiter ist $\{(x, y)^f \mid y^f = T(x^f, u, v^f)\}$ für jedes $u, v \in S$, so daß also die Gerade $\{(x, y) \mid y \in T(x, u, v)\}$ durch $\bar{f}$ wieder in eine Gerade desselben Büschels übergeht. Es ist klar, daß die induzierte Abbildung auf der Menge der Geraden bijektiv ist, so daß $\bar{f}$ ein Isomorphismus von $\mathcal{N}_{\mathcal{T}}$ auf $\mathcal{N}_{\mathcal{T}'}$ ist.

Ist $\mathcal{T}$ linear, dann gilt $\mathcal{T}(x, u, v) = x \cdot_{\mathcal{T}} u +_{\mathcal{T}} v$ für jedes $x, u, v \in S$. Folglich ist $x \cdot_{\mathcal{T}'} u = (T(x^f, u, 0))^{f^{-1}} = (x^f \cdot_{\mathcal{T}} u)^{f^{-1}}$ für jedes $x, u \in S$ und $z +_{\mathcal{T}'} v = ((T(z^f, 1, v^f))^{f^{-1}} = (z^f +_{\mathcal{T}} v^f)^{f^{-1}}$ für jedes $z, v \in S$, so daß auch $x \cdot_{\mathcal{T}'} u +_{\mathcal{T}'} v = ((x^f \cdot_{\mathcal{T}} u)^{f^{-1}} +_{\mathcal{T}} v^f)^{f^{-1}} = (((x^f \cdot_{\mathcal{T}} u)^{f^{-1}}) +_{\mathcal{T}} v^f)^{f^{-1}} = (T(x^f, u, v^f))^{f^{-1}} = T'(x, u, v)$ für jedes $x, u, v \in S$ ist. ■

Konstruktion 3. Es sei $\mathcal{T} = (S, T, 0, 1)$ ein planarer Ternärring, so daß $\mathcal{N}_{\mathcal{T}}$ eine affine Ebene ist (uneigentliche Punkte und die uneigentliche Gerade sind dabei nicht einbezogen). Wir setzen voraus, daß $\# S \geqq \aleph_0$. Weiter sei g eine injektive, aber nicht bijektive Abbildung der Menge S in sich mit $0^g = 0$, $1^g = 1$. Lassen wir sämtliche Punkte von $\mathcal{N}_{\mathcal{T}}$ ungeändert und lassen wir alle Geraden mit Steigungen aus $S^g := \{u^g \mid u \in S\}$ weg. Auf diese Weise bekommen wir ein Gewebe $\mathcal{N}_{\mathcal{T}}^g$, daß in $\mathcal{N}_{\mathcal{T}}$ eingebettet ist (dabei verlangen wir natürlich, daß zwei Geraden aus $\mathcal{N}_{\mathcal{T}}^g$ demselben Parallelenbüschel gehören, wenn und nur wenn sie dieselbe Steigung in $\mathcal{N}_{\mathcal{T}}$ besitzen. Umgekehrt, jedes Gewebe betrachteter Art, das in eine affine Ebene mit denselben eigentlichen Punkten und derselben Ordnung eingebettet ist, kann durch die vorige Vorschrift konstruiert werden. Was die algebraische Ausdrückung des vorangehenden Eingriffes in die Struktur der ursprünglichen affinen Ebene betrifft, definieren wir eine neue ternäre Operation $T_{\mathrm{id}_S, g}$ auf S, so daß $T_{\mathrm{id}_S, g}(x, u, v) = T(x, u^g, v)$ für jedes $x, u, v \in S$ ist; dabei respektieren wir die Bezeichnungsweise nach dem Satz

6. Folglich ist $\mathscr{T}_{\mathrm{id}_S,g} = (S, T_{\mathrm{id}_S,g}, 0, 1)$ ein Ternärring und $\mathscr{N}_{\mathscr{T}_{\mathrm{id}_S,g}}$ ein in $\mathscr{N}_{\mathscr{T}}$ eingebetteter Blockplan; bei dieser Einbettung bleiben sämtliche Punkte unverändert. Diese Tatsachen können ohne Schwierigkeiten direkt nachgeprüft werden.

3. BEISPIELE DER TERNÄRRINGE EINZELNER TYPEN

Bei der Behandlung der Gewebe betrachteter Art taucht als eine der ersten Fragen auf, wann ein gegebenes Gewebe in eine affine Ebene im Sinn der Konstruktion 3 einbettbar ist, oder ob es wenigstens eine Transversale (d. h. eine Punktmenge, welche mit jeder Geraden des Gewebes genau einen Punkt gemein hat) zuläßt. Wie J. KADLEČEK in [4], S. 309 (Proposition 2.4) gezeigt hat, läßt kein Ternärring des Typs III R_1, also kein (nichtplanarer) Rechtsfastkörper, eine Transversale zu, so daß auch über seine Einbettung in affine Ebene im Sinn der Konstruktion 3 keine Rede sein kann. Im weiteren lassen wir aber die Einbettungsfragen beiseite und begnügen uns mit der Angabe der Beispiele der Ternärringe der einzelnen Typen $I_{(1)}$, $II_{(2)}$, III R_1, III R_2, III $L_{(2)}$, IV_1, IV_2, V_1, V_2, bzw. auch derjenigen, welche die Einbettbarkeit zulassen.

Lehrsatz 4. *Es sei $(S, \cdot)$ eine Halbgruppe, welche folgende Bedingungen erfüllt:*

(α) *Es gibt ein Element $1 \in S$, so daß $y = y \,.\, 1$ für jedes $y \in S$ und $\#\{x \in S \mid x \,.\, y = 1\} = 1$ ist.*

(β) $\#\{y \in S \mid a \,.\, y = c\} \leqq 1$ *für jedes $a, c \in S$.*

Dann gilt $1 \,.\, x = x$ für jedes $x \in S$ (so daß dann bekanntlich $(S, \cdot)$ eine Gruppe ist).

Beweis. Für $a \in S$ ist $\{x \in S \mid x \,.\, a = a\} \neq \emptyset$, so daß es ein $x_1 \in S$ mit $x_1 \,.\, a = a$ gibt. Folglich ist $(1 \,.\, x_1) \,.\, a = 1 \,.\, (x_1 \,.\, a) = 1 \,.\, a$. Nach ($\alpha$) für $y = a$ bekommt man $1 \,.\, x_1 = 1$ und wegen $1 \,.\, 1 = 1$ folgt hieraus nach (β) $x_1 = 1$, so daß auch $1 \,.\, a = a$ ist. ■

Satz 5. *Jeder Linksfastkörper ist planar.*

Beweis. Es sei $\mathscr{T} = (S, T, 0, 1)$ ein Linksfastkörper. Dann ist $(S \setminus \{0\}, \cdot|_{(S\setminus\{0\})^2})$ eine Halbgruppe, welche die Bedingungen des Lehrsatzes 4 erfüllt und folglich eine Gruppe ist. Die Planaritätsbedingung lautet nun: Für jedes $a_1, a_2, d_1, d_2 \in S$ mit $a_1 \neq a_2$ ist $\#\{(u, v) \in S^2 \mid a_1 \cdot_{\mathscr{T}} u +_{\mathscr{T}} v = d_1,\ a_2 \cdot_{\mathscr{T}} u +_{\mathscr{T}} v = d_2\} = 1$.

Dies kann weiter mit Hilfe der Substraktion $-_{\mathscr{T}}$ bezüglich der Gruppenoperation $+_{\mathscr{T}}$ folgenderweise vereinfacht werden: Für jedes $a_1, a_2, d \in S$ mit $a_1 \neq a_2$ ist $\# u \in S \mid a_1 \cdot_{\mathscr{T}} u -_{\mathscr{T}} a_2 \cdot_{\mathscr{T}} u = d\} = 1$.

Die Gleichung $a_1 \cdot_{\mathscr{T}} u -_{\mathscr{T}} a_2 \cdot_{\mathscr{T}} u = d$ vereinfacht sich weiter auf $(a_1 -_{\mathscr{T}} a_2) \cdot_{\mathscr{T}} \cdot_{\mathscr{T}} u = d$ und daraus ist schon die Erfüllung der Planaritätsbedingung ersichtlich. ■

Satz 6. *Jeder Semikörper erster Art ist planar.*

Beweis. Kann man ähnlich führen wie bei vorigem Satz 5. Benutzt wird dabei das Distributivitätsgesetz und dann die Tatsache, daß die Multiplikation auf vom Nullelement verschiedenen Elementen eine Quasigruppenoperation ist. ∎

Verabredung. Ist $\mathscr{T} = (S, T, 0, 1)$ ein Ternärring und f, g Abbildungen der Menge S in sich, dann definieren wir eine neue ternäre Operation auf S durch $T_{f,g}(x, u, v) := T(x^f, u^g, v)$ für jedes $x, u, v \in S$ und $\mathscr{T}_{f,g} := (S, T_{f,g}, 0, 1)$.

Konstruktion 4. Beispiele der Ternärringe der Typen $\mathrm{II}_{(2)}$, $\mathrm{III}\ \mathrm{R}_2$, $\mathrm{III}\ \mathrm{L}_{(2)}$ bekommt man durch eine Verwandlung der ternären Operation T auf der Menge S der Elemente eines unendlichen Körpers $(S, +, \cdot, 0, 1)$, die durch $T(x, u, v) := x \cdot u + v$ für jedes $x, u, v \in S$ definiert wird. Weiter seien f, g folgenderweise spezialisierte Abbildungen der Menge S in sich: f sei entweder id_S, oder eine solche Permutation der Menge S mit $0^f = 0$, welche die Addition nicht erhält, während g eine injektive, aber nicht bijektive Abbildung der Menge S in sich sei. Dann ist leicht nachprüfbar, daß $\mathscr{T}_{f,g}$ (im Sinn der vorigen Verabredung) ein nichtplanarer Ternärring ist und daß gilt: Ist $f = \mathrm{id}_S$ und g injektiv, nicht bijektiv und additiv (z. B. kann man für den ursprünglichen Körper den Körper einer Unbestimmten über dem Galois-Feld der Primordnung p und für g die Abbildung $u \mapsto u^p$ nehmen), dann ist $\mathscr{T}_{f,g}$ ein Ternärring des Typs $\mathrm{II}_{(2)}$. Ist f bijektiv, nicht additiv und mit $0^f = 0$ und g injektiv, nicht bijektiv und additiv, dann ist $\mathscr{T}_{f,g}$ ein Ternärring des Typs $\mathrm{III}\ \mathrm{R}_2$. Ist $f = \mathrm{id}_S$ und g injektiv, nicht surjektiv und nicht additiv (z. B. können wir für den Ausgangskörper den Körper der rationalen Zahlen und für g die Abbildung $u \mapsto u^3$ nehmen), dann ist $\mathscr{T}_{f,g}$ ein Ternärring des Typs $\mathrm{III}\ \mathrm{L}_{(2)}$.

Konstruktion 5. Es sei $\mathscr{T} = (R, \tilde{T}, 0, 1)$ ein planarer nichtlinearer Ternärring, wobei $(R, +, \cdot, 0, 1)$ der Körper der reellen Zahlen ist und $\tilde{T}(x, u, v) := x \cdot u + v$ für jedes $x, u, v \in R$ mit $u \geqq 0$ oder $v \leqq 0$, sowie für jedes $x, u, v \in R$ mit $u < 0 < v$, $0 < x$, $-v/u < x$, während $\tilde{T}(x, u, v) := v\sqrt{[1 - (u^2/v^2)\, x^2]}$ für jedes $x, u, v \in R$ mit $u < 0 < v$, $0 \leqq x \leqq -v/u$. Nehmen für g eine injektive, nicht surjektive Abbildung der Menge R in sich mit $0^g = 0$, $1^g = 1$ (z. B. sei g eine Abbildung der Menge R in sich, welche die Menge $\{x \in R \mid x > 1\}$ bijektiv auf $\{x \in R \mid 1 < x < 2\}$, die Menge $\{x \in R \mid x < 0\}$ bijektiv auf $\{x \in R \mid -1 < x < 0\}$ überführt und die Menge $\{x \in R \mid 0 \leqq x \leqq 1\}$ elementweise festläßt). Nach Konstruktion 3 ist $(R, \tilde{T}_{\mathrm{id}_R, g}, 0, 1)$ ein nichtplanarer Ternärring zweiter Art. Weiter findet man leicht, daß $(R, \tilde{T}, 0, 1)$, $(R, \tilde{T}_{\mathrm{id}_R, g}, 0, 1)$ nichtlinear sind, so daß $(R, \tilde{T}_{\mathrm{id}_R, g}, 0, 1)$ ein Ternärring des Typs V_2 ist.

Konstruktion 6. Hier werden wir die Resultate von J. L. Zemmer (Math. Stud. *31* (1964), 145–150), V. Havel (Comm. Math. Univ. Carol. *22* (1970), 939–952) und W. Kerby (Abh. Math. Sem. Univ. Hamb. *32* (1968), 20–24) benützen: Es sei

$(C(t), +, \cdot, 0, 1)$ der Körper der rationalen Funktionen einer Unbestimmten t über komplexen Zahlen. Definieren wir eine neue Multiplikation $\odot$ auf $C(t)$ durch $(a_1(t)/a_2(t)) \odot (b_1(t)/b_2(t)) := (a_1(t)/a_2(t)) \cdot (b_1(t + \text{Stufe von } a_1 - \text{Stufe von } a_2) : : b_2(t + \text{Stufe von } a_1 - \text{Stufe von } a_2)$ für jedes $a_1(t)/a_2(t), b_1(t)/b_2(t) \in C(t)$ und eine neue ternäre Operation $T^{\odot}$ auf $C(t)$ durch $T^{\odot}(x, u, v) := x \odot u + v$ für jedes $x, u, v \in C(t)$. Man kann nachprüfen, daß $\mathcal{T}^{\odot} := (C(t), T^{\odot}, 0, 1)$ ein Ternärring des Typs I_1 ist.

Konstruktion 7. Hier benützen wir ein Resultat von J. BUREŠ (Czech. Math. Journ. *23* (1973), 611–614) das durch geeignete Umwandlung des Verfahrens von E. H. DAVIS (nämlich der Konstruktion 5.2 aus [2], S. 951–952) entstand, indem der Körper der Potenzreihen mit ganzzahligen Exponenten durch den Körper der Potenzreihen mit gebrochenen Exponenten ersetzt wurde. Nehmen wir also den Körper $(C(\theta)^* (t), +, \cdot, 0, 1)$ der Potenzreihen mit rationalen Exponenten über dem Körper der rationalen Funktionen einer Unbestimmten θ über komplexen Zahlen. Es sei $^{-}$ die Abbildung $x + iy \mapsto x - iy$ definiert für jedes reelle x, y. Wir erweitern diese Abbildung auf $C(\theta)$ durch $\overline{p(\theta)/q(\theta)} = \bar{p}(\theta)/\bar{q}(\theta)$, wo $\bar{p}, \bar{q}$ Polynome sind, in denen jeder Koefizient komplex konjugiert zum entsprechenden Koefizient in p, q ist. Endlich erweitern wir diese Abbildung auf $C(\theta)^* (t)$ durch $\overline{\sum_{i=h}^{\infty} a_i(\theta)\, x^{i/n}} = \sum_{i=h}^{\infty} \overline{a_i(\theta)}\, x^{i/n}$, wo h ganzzahlig ist und $a_h(\theta) \neq 0$ gilt. Für jedes solche $\xi = \sum_{i=h}^{\infty} a_i(\theta)\, x^{i/n}$ soll der Zähler der gekürzten Form mit positivem Nenner von h/n bei $h \neq 0$, bzw. die Zahl 0 bei $h = 0$ das *obere Gewicht* von ξ heißen; weiter soll der Zähler der gekürzten Form von $a_h(\theta)$ die *Stufe* und der Nenner das *untere Gewicht* von ξ heißen. Mit ξ^+ bezeichnen wir die Reihe, die aus ξ entsteht, indem man die Unbestimmte θ an jeder Stelle durch $\theta + 1$ ersetzt; für die verschwindende Reihe 0 setzen wir $0^+ := 0$. Weiter definieren wir eine neue Multiplikation $\bullet$ auf $C(\theta)^* (t)$, so daß für jedes $\xi, \zeta \in C(\theta)^* (t)$ das Produkt $\xi \bullet \zeta$ so entsteht, daß wir zuerst in der Anzahl gleich dem unteren Gewicht von ξ die Abbildung $^+$ und danach in der Anzahl gleich dem oberen Gewicht von ξ die Abbildung $^-$ schrittweise auf ξ anwenden; ist ξ' das Resultat, so setzen wir $\xi \bullet \zeta = \xi' \cdot \zeta$. Endlich definieren wir eine ternäre Operation τ auf $C(\theta)^* (t)$ mittels $\tau(\xi, \zeta, \eta) := \xi \bullet \zeta + \eta$ für jedes $\xi, \zeta, \eta \in C(\theta)^* (t)$. Es ist nachprüfbar, daß $(C(\theta)^* (t), \tau, 0, 1)$ ein Ternärring des Typs III R_1 ist.

Konstruktion 8. Es sei $\mathcal{T} = (S, T, 0, 1)$ ein Ternärring und f eine Permutation der Menge S mit $0^f = 0$. Dann ist offensichtlich auch $\mathcal{T}_{f,\mathrm{id}_S}$ ein Ternärring. a) Ist $\mathcal{T}$ speziell eine nichtplanare kartesische Gruppe erster Art, so gilt dasselbe für $\mathcal{T}_{f,\mathrm{id}_S}$. b) Ist $\mathcal{T}$ speziell ein nichtplanarer Fastkörper erster Art und f sein nichtidentischer Automorphismus, dann ist $\mathcal{T}_{f,\mathrm{id}_S}$ ein nichtplanarer Rechtsquasikörper erster Art mit nichtassoziativer Multiplikation, also ein Ternärring des Typs III R_1.

Beweis der Behauptung a), sowie der Behauptung b) bis auf die Nichtassoziativität der Operation $\mathscr{T}_{f,\mathrm{id}_S}$ ist nur eine Routine. Was die zulezt erwähnte Tatsache betrifft, bemerken wir, daß

$$(a \cdot_{\mathscr{T}_{f,\mathrm{id}_S}} b) \cdot_{\mathscr{T}_{f,\mathrm{id}_S}} = (a^f \cdot_{\mathscr{T}} b)^f \cdot_{\mathscr{T}} c = a^{f^2} \cdot_{\mathscr{T}} b^f \cdot_{\mathscr{T}} c\,,$$

sowie

$$a \cdot_{\mathscr{T}_{f,\mathrm{id}_S}} (b \cdot_{\mathscr{T}_{f,\mathrm{id}_S}} c) = a^f \cdot_{\mathscr{T}} b^f \cdot_{\mathscr{T}} c$$

für jedes $a, b, c \in S$ ist. Wegen $f \neq \mathrm{id}_s$ existiert ein $a_0 \in S$ mit $a_0^f \neq a_0$, so daß auch $a_0^{f^2} \neq a_0^f$ und $a_0^{f^2} \cdot_{\mathscr{T}} b^f \cdot_{\mathscr{T}} c \neq a_0^f \cdot_{\mathscr{T}} b^f \cdot_{\mathscr{T}} c$ für jedes $b, c \in S$. Ein konkretes Beispiel bekommen wir, indem wir mit dem Fastkörper $\mathscr{T}^{\odot}$ aus der Konstruktion 6 ausgehen und für f die natürliche Verlängerung des Automorphismus $^{-}: x + iy \mapsto x - iy$ der komplexen Zahlen auf $(C(t), +, \odot, 0, 1)$ nehmen.

Konstruktion 9. a) Ist $\mathscr{T} = (S, T, 0, 1)$ ein planarer, bzw. nichtplanarer Ternärring und g eine Permutation der Menge S mit $0^g = 0$, $1^g = 1$, so ist auch $\mathscr{T}_{\mathrm{id}_S, g}$ ein planarer, bzw. nichtplanarer Ternärring. b) Ist $\mathscr{T} = (S, T, 0, 1)$ ein Ternärring des Typs II_1 und g ein nichtidentischer Automorphismus von $\mathscr{T}$, dann ist $\mathscr{T}_{\mathrm{id}_S, g}$ ein Ternärring des Typs III R_1. c) Ist $\mathscr{T} = (S, T, 0, 1)$ ein Ternärring des Typs III R_1 und g eine nichtadditive Permutation der Menge S mit $0^g = 0$, $1^g = 1$, dann ist $\mathscr{T}_{\mathrm{id}_S, g}$ ein Ternärring des Typs IV_1.

Der Beweis der Behauptungen a) und b) verlangt nur eine Routine. Wählt man $\mathscr{T}^{\odot}$, g in derselben Weise wie am Ende der Konstruktion 8, dann bekommt man einen Ternärring $\mathscr{T}^{\odot}_{\mathrm{id}_S, g}$ des Typs III R_1. Auch der Beweis der Behauptung c) verläuft ohne Schwierigkeit, bis vielleicht auf die Nichtdistributivität von $\mathscr{T}_{\mathrm{id}_S, g}$: Es gilt

$$a \cdot_{\mathscr{T}_{\mathrm{id}_S, g}} (b + c) = a \cdot_{\mathscr{T}} (b +_{\mathscr{T}} c)^g$$

und

$$a \cdot_{\mathscr{T}_{\mathrm{id}_S, g}} b +_{\mathscr{T}_{\mathrm{id}_S, g}} a \cdot_{\mathscr{T}_{\mathrm{id}_S, g}} c = a \cdot_{\mathscr{T}} b^g +_{\mathscr{T}} a \cdot_{\mathscr{T}} c^g\,.$$

Wegen der Nichtadditivität von g gibt es Elemente $b_0, c_0 \in S$, so daß $(b_0 +_{\mathscr{T}} c_0)^g \neq b_0^g +_{\mathscr{T}} c_0^g$ und folglich auch $a \cdot_{\mathscr{T}} (b_0 +_{\mathscr{T}} c_0)^g \neq a \cdot_{\mathscr{T}} (b_0^g +_{\mathscr{T}} c_0^g) = a \cdot_{\mathscr{T}} b_0^g +_{\mathscr{T}} a \cdot_{\mathscr{T}} c_0^g$ für jedes $a \in S$ gilt. Es genügt also für $\mathscr{T}$ einen Ternärring des Typs III R_1 aus dem Ende der Konstruktion 8 oder 9 zu nehmen und für g eine Permutation der Menge $C(t)$ zu wählen, welche sämtliche Elemente festläßt bis auf zwei bei g vertauschbare Elemente $a(t), b(t) \in C(t) \setminus \{0, 1\}$. Dann ist $\mathscr{T}_{\mathrm{id}_S, g}$ ein Ternärring des Typs IV_1.

Konstruktion 10. Im weiteren werden wir ein Beispiel von G. Pickert (Publ. Math. Debrecen *4* (1956), 157–160) für unsere Zwecke modifizieren, indem wir den geordneten Körper, wo alle nichtnegative Elemente Quadrate sind, durch den Körper $(Q, +, \cdot, 0, 1)$ rationaler Zahlen ersetzen: Es sei $\hat{T}$ eine ternäre Operation auf Q

definiert durch

$$\hat{T}(x, u, v) := xu + v \quad \text{für jedes} \quad x, u, v \in Q \quad \text{mit} \quad u \leqq 1\,, \quad v \leqq 0$$

$$\text{und für jedes} \quad x, u, v \in Q \quad \text{mit} \quad x < 0\,,$$

$$\hat{T}(x, u, v) := xu + uv \quad \text{für jedes} \quad x, u, v \in Q \quad \text{mit} \quad x \geqq 1\,, \quad u > 1\,, \quad v > 0\,,$$

$$\hat{T}(x, u, v) := x(u + (u - 1)\,v) + v \quad \text{für jedes} \quad x, u, v \in Q \quad \text{mit}$$

$$v < 0 < x < 1 < u\,.$$

Dann ist $(Q, \hat{T}, 0, 1)$ ein Ternärring des Typs V_1. Der einzige nicht routinengemäß durchführbare Schritt des Beweises ist die Nachprüfung der Nichtplanarität. Dazu behaupten wir, daß $\{(u, v) \in Q^2 \mid \hat{T}(-1, u, v) = 0,\ \hat{T}(2, u, v) = 4\} \neq \emptyset$ ist. Im Fall $u \leqq 1$ oder $v \leqq 0$ lauten die untersuchten Gleichungen $-u + v = 0$, $2u + v = 4$, so daß dann $u, v \geqq 1$ folgt, was ein Widerspruch ist. Ist $u > 1$, $v > 0$, dann lauten die untersuchten Gleichungen $-u + v = 0$, $2u + uv = 4$, so daß folglich $u^2 + 2u - 4 = 0$ gilt, was wegen $\{u \in Q \mid u^2 - 2u + 4 = 0\} = \emptyset$ wieder einen Widerspruch liefert.

Konstruktion 11. Definieren wir eine ternäre Operation $\hat{\hat{T}}$ auf Q durch $\hat{\hat{T}}(x, u, v) := (x \,.\, u)^3 + v$ für jedes $x, u, v \in Q$ mit $x \geqq 0$ und durch $\hat{\hat{T}}(x, u, v) := x \,.\, u + v$ für jedes $x, u, v \in S$ mit $x < 0$. Dann ist $(Q, \hat{\hat{T}}, 0, 1)$ ein Ternärring des Typs IV_2. Die Nachprüfung dieser Tatsache bietet keine weiteren Schwierigkeiten.

Literaturverzeichnis

[1] *E. H. Davis:* Incidence systems associated with non-planar near-fields, Canad. Journ. Math. *22* (1970), 939—952.

[2] *V. Havel:* Homomorphisms of nets of fixed degree, with singular points on the same line, Czech. Math. Journ. *26* (1976) 43—54.

[3] *V. Havel:* Kleine Desargues-Bedingung in Geweben, Čas. pěst. mat. *102* (1977), 144—165.

[4] *J. Kadleček:* Construction of a net without transversal over a non-planar near-field, Czech. Math. Jour. *24* (1974), 301—310.

Anschrift der Verfasser: 602 00 Brno, Hilleho 6 (Vysoké učení technické).