Václav Petržílka
Über Torsionsschwingungen von kreisförmigen Platten

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 65 (1936), No. 2, 110--115

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120832

Über Torsionsschwingungen von kreisförmigen Platten.

V. Petržílka, Praha.

(Eingegangen am 21. Dezember 1935.)

In der vorliegenden Arbeit sind die Torsionsschwingungen von kreisförmigen, isotropen Platten untersucht. Gleichzeitig wird gezeigt, daß die Torsionsschwingungen mit einer von drei möglichen Arten der Längsschwingungen einer kreisförmigen Platte identisch sind.

Es ist bekannt, daß die kreisförmigen Platten Querschwingungen, Längsschwingungen und Dickenschwingungen ausführen können, die in einer Anzahl von Arbeiten ausführlich untersucht worden sind. Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit Torsionsschwingungen von kreisförmigen Platten; auf Grund der abgeleiteten Beziehungen werde ich zeigen, daß diese Schwingungen mit einer Art von Längsschwingungen, die ich früher experimentell untersucht habe, identisch sind. Soweit ich feststellen konnte, wurden bisher in der Literatur nur Torsionsschwingungen von ringförmigen Scheiben in der Arbeit von Grammel[1]) behandelt und zwar mit Rücksicht auf die Verformungen und Beanspruchungen von Dampfturbinenwellen, die durch Schwingungen von Dampfturbinenscheiben verursacht werden können. Die Differentialgleichung der Torsionsschwingungen von ringförmigen Scheiben, die Grammel in seiner Arbeit abgeleitet hat, läßt sich auch für Schwingungen voller Platten, allerdings mit anderen Grenzbedingungen, anwenden. Wegen der besseren Verständlichkeit der einzelnen Ergebnisse, werde ich zuerst kurz die Aufstellung der Differentialgleichung wiedergeben.

In der Abb. 1 ist ein Teil einer kreisförmigen Platte (Radius a, Dicke h) dargestellt, die aus einem isotropen Material der Dichte ϱ besteht. Durch zwei senkrecht zu der Plattenebene stehende und koaxiale Zylinder vom Halbmesser r bzw. $r + dr$ wird von der Platte ein ringförmiges Element mit den Ringfasern z_1 und z_2 herausgeschnitten. Unter dem Einfluß der Torsion d. h. der Torsionsspannungen τ, werden die äußeren Ringfasern gegen die

[1]) R. Grammel, Ztschr. f. angewandte Mathematik u. Mechanik **5** (1925), 193.

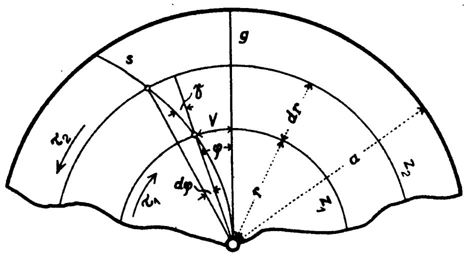
inneren so verdreht, daß die ursprüngliche radiale Gerade g in eine in derselben Ebene liegende spiralige Kurve s übergeht. Wie aus der Abb. 1 ersichtlich ist, gelten dann zwischen den einzelnen Größen folgende Beziehungen:

$$\gamma \, \mathrm{d}r = (r + \mathrm{d}r) \, \mathrm{d}\varphi$$

oder in erster Annäherung

$$\gamma = \frac{(r + \mathrm{d}r) \, \mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} \doteq r \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} . \tag{1}$$

Weil γ nach der Definition des Torsionsmoduls G mit den Torsions-



spannungen τ durch die bekannte Beziehung

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \tag{2}$$

zusammenhängt, ergibt sich für den Torsionswinkel φ die Gleichung

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\tau}{Gr} \, \mathrm{d}r \tag{3}$$

oder

$$\varphi = \int_{r=0}^{r} \frac{\tau}{Gr} \, \mathrm{d}r. \tag{4}$$

Wird um diesen Winkel φ ein Raumelement $r \, \mathrm{d}\varphi \, . \, \mathrm{d}r \, . \, h$ der Platte verdrillt, so greift an seiner Innenbegrenzung (in der Zone z_1) eine Tangentialkraft $T_1 = \tau_1 h r \, \mathrm{d}\varphi$ bzw. ein im Sinne abnehmender φ drehendes Moment

$$P_1 = r T_1 = \tau_1 h r^2 \, \mathrm{d}\varphi \tag{5}$$

an, an seiner Außenbegrenzung (in der Zone z_2) eine Tangentialkraft T_2 und ein im Sinne zunehmender φ drehendes Moment $P_2 = (r + \mathrm{d}r) \, T_2$. Im ganzen wirkt also an das betreffende Element ein im Sinne zunehmender φ positives Moment

$$P = P_2 - P_1 = \frac{\partial P_1}{\partial r} \, \mathrm{d}r, \tag{6}$$

wenn wir die Glieder höherer Ordnung vernachlässigen. Nach der Gl. (5) und (6) ist also

$$P = \frac{\partial(\tau_1 r^2 h)}{\partial r} \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi. \tag{7}$$

Das Trägheitsmoment K des betrachteten Elements in Bezug auf die Plattenachse ist gleich

$$K = r^2 \, \mathrm{d}m = \varrho r^3 h \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi. \tag{8}$$

Für die Rotationsbewegung eines starren Körpers um eine feste Achse gilt die bekannte Gleichung

$$K \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = P.$$

Werden in diese Gleichung die Werte von P und K aus Gl. (7) und (8) eingesetzt, so ergibt sich

$$\varrho r^3 h \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial(\tau_1 r^2 h)}{\partial r}.$$

Diese Gleichung, die man auf Grund der Gl. (3) und unter Voraussetzung der konstanten Plattendicke h in der endgültigen Form

$$\varrho r^3 \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = G \frac{\partial}{\partial r}\left(r^3 \frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) \tag{9}$$

schreiben kann, ist die gesuchte Differentialgleichung der Torsionsschwingungen von kreisförmigen Platten.

Durch den Ansatz

$$\varphi(r, t) = R(r) \, T(t) \tag{10}$$

zerfällt diese Gleichung in zwei Gleichungen

$$\frac{1}{c^2 \, T(t)} \frac{\mathrm{d}^2 T(t)}{\mathrm{d}t^2} = -\varkappa_n^2 \tag{11}$$

$$\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^3 \frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right)}{r^3 \, R(r)} = -\varkappa_n^2, \tag{12}$$

wo $c = \sqrt{G/\varrho}$ ist und $-\varkappa_n^2$ eine konstante Größe bedeutet. Für $T(t)$ ergibt sich der Ausdruck

$$T(t) = A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t, \tag{13}$$

wobei die Beziehung

$$\omega_n = 2\pi f_n = \varkappa_n c \tag{14}$$

gilt, wo ω_n die cyklische, f_n die gewöhnliche Frequenz bedeutet. Für $R(r)$ erhält man aus (12) die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2 R(r)}{\mathrm{d}r^2} + \frac{3}{r}\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r} + \varkappa_n^2 R(r) = 0 \tag{15}$$

welche eine Gleichung des Typus[2])

$$y'' + \frac{1-2q}{x} y' + \left(\varkappa_n^2 + \frac{q^2 - p^2}{x^2}\right) y = 0$$

ist. Das allgemeine Integral dieser Gleichung ist durch den Ausdruck

$$y = x^q Z_p(\varkappa_n x) = x^q [C_1 J_p(\varkappa_n x) + C_2 N_p(\varkappa_n x)]$$

gegeben, wobei J_p die Besselsche, N_p die Neumannsche Funktion p-ter Ordnung, C_1 und C_2 Integrationskonstanten bedeuten. Für den gegebenen Fall ist $q = -1$, $p = \pm 1$, und die Lösung durch die Ausdrücke

$$R_1(r) = r^{-1} Z_1(\varkappa_n r); \; R_2(r) = r^{-1} Z_{-1}(\varkappa_n r) = -r^{-1} Z_1(\varkappa_n r) \tag{16}$$

gegeben, die aber bis auf das Vorzeichen identisch sind. Nach den Gl. (10), (13), (14) und (16) ist also das allgemeine Integral der Gl. (9)

$$\varphi(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} r^{-1} Z_1(\varkappa_n r)\,(A_n \sin \varkappa_n ct + B_n \cos \varkappa_n ct). \tag{17}$$

Für den Mittelpunkt der Platte ($r = 0$) muß der Winkel φ einen endlichen Wert aufnehmen, während die Funktion $r^{-1} Z_1(\varkappa_n r)$ über alle Grenzen wächst:

$$\lim_{r=0} r^{-1} Z_1(\varkappa_n r) = C_1 \lim_{r=0} r^{-1} J_1(\varkappa_n r) + C_2 \lim_{r=0} r^{-1} N_1(\varkappa_n r)$$

oder

$$\lim_{r=0} r^{-1} Z_1(\varkappa_n r) = C_1 \lim_{r=0} \frac{1}{r}\cdot\frac{r}{2} - C_2 \lim_{r=0} \frac{2}{\pi r^2} \to \infty.$$

Daraus ergibt sich also, daß die Konstante $C_2 = 0$ sein muß. Dadurch erhält die Lösung seine endgültige Form und zwar für die n-te Oberschwingung ist der Winkel

$$\varphi_n(r, t) = C_1 r^{-1} J_1(\varkappa_n r)\,(A_n \sin \varkappa_n ct + B_n \cos \varkappa_n ct), \tag{18}$$

die elastische Verschiebung V ist

$$V_n = r\,\varphi_n(r, t) = C_1 J_1(\varkappa_n r)\,(A_n \sin \varkappa_n ct + B_n \cos \varkappa_n ct). \tag{19}$$

[2]) Jahnke-Emde, Funktionentafeln, 2. Aufl. (1933), 214.

Nebendem muß man noch die Randbedingungen heranziehen: für eine vollkommen freie Platte ist an ihrem freien Rande, d. h. für $r = a$, die Torsionsspannung τ gleich Null. Nach Gl. (3) gilt also für beliebige Zeit

$$\tau_{r=a} = \left(Gr \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_{r=a} = 0 \tag{20}$$

oder mit Hilfe der Gl. (17)

$$J_0(\varkappa_n a) - 2\frac{J_1(\varkappa_n a)}{\varkappa_n a} = 0 \tag{21}$$

mit den Wurzeln

$$x_n = \varkappa_n a = 5{,}136;\ 8{,}412;\ 11{,}620;\ 14{,}796;\ldots$$

Die Frequenz der Torsionsschwingungen ist also nach Gl. (14) durch den Ausdruck

$$f_n = \frac{x_n}{2\pi a}\sqrt{\frac{G}{\varrho}}$$

gegeben; weil zwischen dem Torsionsmodul G, dem Elastizitätsmodul E und der Poissonschen Konstante σ, die bekannte Beziehung

$$G = \frac{E}{2\,(1+\sigma)}$$

existiert, so ist

$$f_n = \frac{x_n}{2\pi a}\sqrt{\frac{E}{2\varrho(1+\sigma)}}. \tag{22}$$

Die Knotenlinien entstehen bei Torsionsschwingungen dort, wo für beliebige Zeit

$$V_n = C_1 J_1(\varkappa_n r)\, T(t) = 0 \tag{23}$$

ist. Die Knotenlinien sind also konzentrische Kreise, deren Radien r_m man aus den Wurzeln $y_m = \varkappa_n r_m$ der Funktion $J_1(\varkappa_n r) = 0$ für die betreffenden n berechnet.

Durch diese Gleichungen sind die Torsionsschwingungen vollkommen beschrieben. Weil zur Ableitung dieser Gleichung das allgemeine Integral (17) der Differentialgleichung (9) zu Grunde gelegt wurde, ist daraus ersichtlich, daß diese Schwingungen die einzige mögliche Art der Torsionsschwingungen einer vollen, kreisförmigen Platte sind.

Weiter werden wir noch beweisen, daß die Torsionsschwingungen von kreisförmigen Platten mit einer Art von Längsschwingungen identisch sind. Aus der Loveschen Theorie[3]) von Längs-

[3]) A. E. H. Love: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Cambridge (1927), 497; Handb. d. Experimentalphysik 17/1 (1934), 368.

schwingungen ergibt sich nämlich, daß bei kreisförmigen Platten drei Arten von Längsschwingungen möglich sind: 1. Schwingungen, bei denen die elastischen Verschiebungen in Richtung des Radius erfolgen (Typus A, Radialschwingungen). 2. Schwingungen, bei denen die elastischen Verschiebungen senkrecht zum Radius erfolgen (Typus B). 3. Schwingungen, bei denen die elastischen Verschiebungen in den beiden genannten Richtungen gleichzeitig erfolgen (Typus C).

Die elastischen Verschiebungen und die Frequenzen von Schwingungen des Typus B sind aber durch dieselben Gleichungen (19), (22), (23) gegeben, durch welche die Torsionsschwingungen charakterisiert sind. Daraus ergibt sich also, daß bei kreisförmigen Platten die Längsschwingungen des Typus B reine Torsionsschwingungen sind.

Die Längsschwingungen des Typus B habe ich schon an senkrecht zur optischen Achse geschliffenen Turmalin- und Quarzplatten experimentell untersucht.[4]) Dabei habe ich an allen Quarzplatten festgestellt, daß sich die Schwingungen des Typus B nur dann erregen ließen, wenn die Elektroden für Spannungszuführung an Enden der Symmetrale des Winkels zwischen zwei elektrischen Achsen angebracht wurden. Diese Beobachtung, die zuerst nicht gut begreiflich war, klärt sich jetzt leicht auf: denn es handelt sich dabei eigentlich um Torsionsschwingungen, deren Erregung Tangentialkräfte (Schubspannungen) erfordert.

II. Physikalisches Institut der Karls-Universität, Praha.

*

O torsních kmitech kruhových desek.

(Obsah předešlého článku.)

V práci jsou studovány torsní kmity kruhových desek z isotropního materiálu a stanoveny jejich vlastní frekvence a uzlové čáry. Současně je ukázáno, že tyto kmity jsou identické s jedním ze tří možných druhů podélných kmitů kruhových desek. Tyto kmity byly již autorem na turmalínových a křemenných destičkách experimentálně studovány a popsány ve dvou předcházejících pracech, uveřejněných v Annalen der Physik.

II. odd. fysikálního ústavu Karlovy university v Praze.

---

[4]) V. Petržílka, Ann. d. Phys. **15** (1932), 881; **23** (1935), 156.