Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Jan Srb

Poznámka k článku „O rozkladu rovinných kolineací"

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 65 (1936), No. 2, 84--87

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/120844`

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1936

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

Poznámka k článku „O rozkladu rovinných kolineací".

Jan Srb, Nový Bohumín.

(Došlo dne 21. května 1935.)

V článku ,,O rozkladu rovinných kolineací v produkt harmonických homologií*)" jsem ukázal, že každou (nesingulární) rovinnou kolineaci je možno rozložit v produkt nejvýše tří harmonických homologií. Ptejme se, není-li možno rovinnou kolineaci rozložit v produkt *dvou* harmonických homologií.

Je-li K kolineace dvou soumístných polí ϱ a ϱ' a má-li pole ϱ' přejít homologií H v soumístné pole ϱ_1 takové, aby kolineace polí ϱ a ϱ_1 byla homologií H_1, musí střed homologie H padnout do středu perspektivnosti dvou lineárních bodových řad korespondujících v K a osa procházet samodružným bodem společným oběma řadám. Protože v rovinné kolineaci je vždy alespoň jeden bod samodružný, existují v ní vždy perspektivní sdružené řady a pak všechny tyto řady mají: 1. jediný, 2. více středů perspektivnosti. V případě 1. je střed vrcholem svazku samodružných paprsků. Existuje tedy řada samodružných bodů a leží-li střed na této řadě je kolineace typu [(10)], neleží-li na ní je kolineace typu [10]. V případě 2. středy vyplňují přímku samodružnou, příslušnou k samodružnému průsečíku perspektivních řad. Padne-li tento průsečík vždy na přidruženou samodružnou přímku je kolineace typu [(000)], nepadne-li na ní nikdy je kolineace typu [000], nastanou-li oba případy zároveň je kolineace typu [0(00)].

Uvažujme nejprve nejobecnější případ, kolineaci typu [000]. Jsou-li X, Y, Z samodružné reálné body neležící v přímce, je kolineace K určena dvěma korespondujícími body A, A' neležícími na žádné straně invariantního trojúhelníku. Nazveme-li průměty bodů A, A' z vrcholů X, Y, Z na strany tohoto A_x, A'_x; A_y, A'_y; A_z, A'_z a průsečíky spojnice AA' se stranami S_x, S_y, S_z jest

*) Časopis **65** (1936), str. 77—83.

$S_xS_yS_zAA' \overset{X}{\underset{\wedge}{=}} S_xZYA_xA'_x \overset{Y}{\underset{\wedge}{=}} ZS_yXA_yA'_y \overset{Z}{\underset{\wedge}{=}} YXS_zA_zA'_z$. Body S_x, S_y, S_z jsou středy perspektivnosti řad XA_x, XA'_x; YA_y, YA'_y; ZA_z, ZA'_z a A_x, A'_x; A_y, A'_y; A_z, A'_z body sdružené na stranách invariantního trojúhelníku. Zaujme-li přímka $S_xS_yS_z$ všechny možné polohy v rovině trojúhelníku XYZ, proběhnou body A, A' všechny dvojiny korespondujících bodů a jest vždy $S_xZYA_xA'_x \,\overline{\wedge}\, ZS_yXA_yA'_y \,\overline{\wedge}\, YXS_zA_zA'_z$. Je tedy kolineace K určena mimo vrcholy X, Y, Z invariantního trojúhelníku třemi body na jedné jeho straně z nichž dva jsou sdružené v K a jeden je středem perspektivnosti řad určených těmi body a protějším vrcholem. Tyto tři body je možno volit libovolně, ale tak, aby nesplývaly žádné dva a žádný s bodem samodružným. Protože dále součin charakteristických dvojpoměrů kolineace K je $+1$, jsou možné dva případy: buď každé dva sdružené body na každé straně invariantního trojúhelníku neoddělují, nebo na jedné straně neoddělují a na dvou oddělují body samodružné. Buď strana YZ ta, na které se A_x, A'_x a Y, Z neoddělují. Zvolíme-li nyní homologii H harmonickou se středem S_x a osou jdoucí bodem X a oddělující harmonicky s bodem S_x body A_x, A'_x, bude přímka XA_x osou homologie H_1 a přímka YZ samodružnou. Aby také H_1 byla involuční, t. j. aby na YZ vznikla h. h. H involuce, je nutno, aby se touto vyměnily samodružné body Y, Z, tedy S_x musí být dvojným bodem involuce určené dvojinami Y, Z a A_x, A'_x. Zvolme bod S_x tak, aby s X (tedy i s Y) odděloval body A_x, A'_x, tedy také s $S_y(S_z)$ body A, A', ale aby nebyl dvojným bodem involuce Y, Z, A_x, A'_x. Z projektivnosti skupin 5 bodů $YZS_xA_xA'_x$ na YZ plyne, že není dvojným bodem žádné skupině na této přímce a z perspektivnosti skupin na ostatních dvou stranách s $S_xS_yS_zAA'$, že při této volbě S_x body A_y, A'_y a A_z, A'_z oddělují samodružné body XY, ZX. Není tedy možno tuto kolineaci rozložit v produkt dvou harmonických homologií. Při jiné volbě S_x je z této perspektivnosti patrno: je-li S_x, S_y nebo S_z dvojným bodem involuce YZ, $A_xA'_x$; XY, $A_zA'_z$ nebo XZ, $A_yA'_y$ v jedné skupině, pak je jím také ve všech skupinách na téže přímce, ale v žádné na zbývajících dvou přímkách. Jsou-li oba body Y, Z imaginární sdružené na reálné samodružné přímce x, promítněme z bodu X dvě lineární, neperspektivní, korespondující řady (A), (A') na přímku x do řad (A_x), (A'_x). Spojnice korespondujících bodů A, A' řad (A), (A') protínají x v řadě (S). Pak je $(A) \,\overline{\wedge}\, (A')$, $(A_x) \overset{X}{\underset{\wedge}{=}} (A)$, $(A'_x) \overset{X}{\underset{\wedge}{=}} (A')$ a protože x je jednou ze spojnic AA' je $(S) \,\overline{\wedge}\, (A) \,\overline{\wedge}\, (A')$ tedy $(S) \,\overline{\wedge}\, (A_x) \,\overline{\wedge}\, (A'_x)$. $AA'S$ je tečnou pravé kuželosečky obalené spojnicemi AA'. Splynou-li A_x a A'_x, prochází tečna bodem X a S splyne s oběma body. Mají tedy po dvou projektivní řady (S), (A_x), (A'_x) tytéž samodružné body Y, Z a skupiny $SA_xA'_xYZ$ jsou opět projektivní. Protože reálná hyperbolická involuce může být určena dvojinou bodů reálných A_x, A'_x a dvojinou imaginárních sdružených Y, Z, platí pro tento typ totéž co bylo řečeno o typu s reálnými body samodružnými.

Jsou-li v kolineaci typu [0(00)] X, Y reálné samodružné body na invariantní přímce x s indukovanou projektivností typu [00] a y invariantní přímka s projektivností typu [(00)], nelze volit střed h. h. H na přímce x, protože perspektivní řady, mající na této přímce středy, procházejí samodružným bodem X, kterým by také musela procházet osa h. h. H. Pak ale projektivnost [00] na přímce x při H invariantní, nemůže touto přejít nikdy v involuci. Zvolíme-li střed h. h. H na přímce y, je tato při ní invariantní a aby projektivnost typu [(00)] na y přešla v involuci, musí osa h. h. H procházet bodem X. Tato osa musí však také procházet bodem Y jako průsečíkem řad se středem perspektivnosti na y. Je tedy nutno zvolit samodružnou přímku x za osu h. h. H. Aby také H_1 mohla být involuční, je nutno, aby soumístné projektivní řady indukované kolineací K na x byly involuční. O této a o kolineacích typu [(10)] a [(000)] je v zmíněném článku dokázáno, že je vždy možno rozložit je v produkt dvou harmonických homologií a zároveň je uvedena volba středů a os.

Neinvoluční kolineaci typu [10] nelze nikdy rozložit v produkt dvou harmonických homologií. Střed h. h. H by bylo nutno zvolit ve středu jejím, který je samodružným bodem řad indukovaných kolineací K na samodružných paprscích jím jdoucích. Tyto paprsky jsou tedy i při H invariantní a projektivnosti typu [00], na nich kolineací K indukované, nemohou h. h. H přejít v perspektivnosti involuční. Jinak by musela být osa dané homologie zvolena za osu h. h. H. V tomto případě opět nemůže přejít v involuci hyperbolická projektivnost indukovaná danou homologií na přímce spojující její střed se středem homologie H, která je také invariantní při H_1. Tím je dokázáno: *Rovinnou kolineaci (nesingulární a neinvoluční) není obecně možno rozložit v produkt dvou harmonických homologií. V případech kdy rozklad možný je, je vždy možný systémem nekonečně mnoha dvojic a to buď jednomocným s invariantní přímkou a invariantním bodem (který může na této přímce ležet), nebo s dvěma přímkami a dvěma body invariantními nebo dvěma systémy dvojmocnými: prvým se svazkem invariantních paprsků, druhým s řadou invariantních bodů.* V případu prvém všechny středy dvojic h. h. jsou dvojiny bodů invariantní přímky a osy dvojiny přímek svazku se středem v invariantním bodě. V případu druhém středy prvých (druhých) h. h. z každé dvojiny jsou body invariantní přímky jedné a společná osa je druhá invariantní přímka. Společný střed druhých (prvých) h. h. je průsečík obou invariantních přímek a osy jsou přímky svazku se středem v invariantním bodě na druhé přímce. V prvém systému dvojmocném je vrchol svazku invariantních paprsků společným středem všech h. h. a osy jsou dvojiny přímek protínajících se na jednom z těchto paprsků. V systému druhém je společnou osou h. h. přímka invariantních bodů a středy dvojice bodů na paprscích svazku s vrcholem na společné ose.

*

Remarque à l'article „Sur la décomposition des homographies planes".*)

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur démontre qu'on ne peut pas en général décomposer une homographie en produit de deux homologies harmoniques. En cas exceptionnel où cette décomposition a lieu, on peut l'effectuer moyennant de paires des homologies harmoniques lesquelles constituent ou bien un système à un paramètre ou bien deux systèmes à deux paramètres.

---

*) L'article cité a été publié dans ce recueil, pp. 77—83.