Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Úlohy

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 70 (1941), No. Suppl., D80--D82

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121819`

ÚLOHY.

Příklady ke cvičení o kompaktních prostorech.

Bedřich Pospíšil, Brno.

Citáty v závorkách se vztahují k Čechovým topologickým prostorům.[1]) Budeme uvažovati toliko AHU-prostory (7.1, 8.4, 6.1). Prostor nazývá se $\mathfrak{a}$-kompaktní,[2]) když průnik $\mathfrak{a}$ uzavřených množin je prázdný jedině tehdy, když je prázdný už průnik jistých konečně mnoha z nich. Prostor nazývá se bikompaktní, když je $\mathfrak{a}$-kompaktní pro všechna $\mathfrak{a}$. P. Alexandrov a P. Urysohn[3]) dokázali, že v bikompaktním R-prostoru (8.5) P jsou charaktery (4.2) bodů rovny pseudocharakterům (4.3). Jejich úvaha je zhruba tato: Nechť $\mathfrak{P}$ je pseudoúplný systém okolí bodu p v P. Zmenšíme-li po případě množiny $U \in \mathfrak{P}$ tak, aby jejich uzávěry byly částmi původních U (vlastnost R!), můžeme míti za to, že p je průnikem všech uzávěrů uU množin $U \in \mathfrak{P}$. Systém $\mathfrak{U}$ všech průniků konečných podsystémů systému $\mathfrak{P}$ tvoří pak úplný systém okolí bodu p a jeho mohutnost je stejná jako systému $\mathfrak{P}$ (srovnej na př. Neubauer l. c. 6.15 a 5.6). Úplnost systému $\mathfrak{U}$ se pak dokáže takto: Buď V otevřené (vlastnost U!) okolí bodu p v P; pak průnik všech

$$F = uU_1 \, . \, uU_2 \ldots uU_N - V \quad (U_n \in \mathfrak{P})$$

je prázdný podle volby systému $\mathfrak{P}$ a tedy je prázdná rovněž jistá množina F (vlastnost A!). Tedy V obsahuje $U_1 U_2 \ldots U_N$, kterážto množina patří do systému $\mathfrak{U}$, jehož prvky jsou okolími bodu p v P (vlastnost A!).

Úvahami zcela podobnými možno dokázat jistá tvrzení zobecňující některé výsledky citovaného mémoiru, které autoři dokazují zpravidla jinak. To je předmětem prvních desíti úloh.

Úkolem jest dokázati tvrzení 1 až 20. Jednotlivých z nich bude zpravidla třeba užívati při dokazování dalších.

1. Je-li charakter bodu p v $\mathfrak{a}$-kompaktním prostoru P nanejvýš roven $\mathfrak{a}$, pak p je R-bod prostoru P.

---

1) Časopis 66, str. D 225.

2) $\mathfrak{a}$ bude vždy transfinitní kardinální číslo. O transfinitní aritmetice možno se poučit na př. z Neubauerova Úvodu do transfinitní aritmetiky, Časopis 67, str. D 101.

3) Mémoire sur les espaces topologiques compacts, Verhandelingen der konink. Akad. van Wetenschappen te Amsterdam 1929, str. 65.

2. Za stejných předpokladu jako v 1 je charakter bodu p v P roven pseudocharakteru.

3. Je-li charakter uzavřené množiny F v $\mathfrak{a}$-kompaktním P nanejvýš $\mathfrak{a}$, pak nutná a dostatečná podmínka, aby se F dala O-oddělit (8.1) od uzavřené Z v P, jest, aby se dala O-oddělit od každého bodu množiny Z.

4. Předpoklady jako v 3. Dá-li se F O-oddělit od každého bodu v $P - F$, pak je charakter v P množiny F roven pseudocharakteru.

5. Jestliže v $\mathfrak{a}$-kompaktním P jsou charaktery uzavřených množin nanejvýš $\mathfrak{a}$, jsou rovny pseudocharakterum.

6. Předpoklady jako v 5. Pak P je N-prostor.

7. Každý bikompaktní prostor je N-prostor a charaktery uzavřených množin jsou v něm rovny pseudocharakterům.

8. Je-li mohutnost otevřené množiny G v $\mathfrak{a}$-kompaktním P nanejvýš $\mathfrak{a}$, pak nutná a dostatečná podmínka, aby se $P - G$ dala O-oddělit od uzavřené Z v P, jest, aby se dala O-oddělit od každého bodu množiny Z.

9. Předpoklady jako v 8. Dá-li se $P - G$ O-oddělit od každého bodu v G, pak je charakter v P množiny $P - G$ roven pseudocharakteru.

10. Každé dvě uzavřené množiny mohutnosti nanejvýš $\mathfrak{a}$ v $\mathfrak{a}$-kompaktním prostoru se dají O-oddělit.

Další úlohy se týkají vnitřních charakteru (4.3) v bikompaktních prostorech. Cvičení 12 bude pomocné.

11. Nechť S je část prostoru P, jejíž mohutnost označíme $\mathfrak{s}$. Nechť p je bod uzávěru v P množiny S a nechť p nepatří do P. Pak vnitřní charakter bodu p v P je nanejvýš roven $\mathfrak{s}$.

12. Nechť N je nekonečná část HN-prostoru P. Pak existuje na P spojitá (reálná) funkce (10.1) nabývající na N nekonečně mnoha hodnot.

Pokyn. Užije se této Urysohnovy věty:[4]) Ke každým dvěma disjunktním v HN-prostoru P uzavřeným množinám A a B existuje na P spojitá f taková, že vždy $0 \leq f(x) \leq 1$ a $f(x) = 1$ pro $x \in A$ a $f(x) = 0$ pro $x \in B$.

K dukazu tvrzení 12 si nejprve pořiďte nekonečnou posloupnost $a_n \in N$ a posloupnost otevřených O_n v P s uzávěry po dvou disjunktními, $a_n \in O_n$. Konstrukce se provede úplnou indukcí, při čemž se staráme o to, aby N měla nekonečně mnoho bodů mimo uzávěry již sestrojených O_n. Spojitá $f = f_n$ na P nechť je volena podle citované Urysohnovy věty pro $A = (a_n)$, $B = P - O_n$. Pak funkce, která splňuje 12, je na př. $\max n^{-1} . f_n$.

13. Vnitřní charaktery bodů v bikompaktním prostoru nemohou být vesměs nespočetné.

---

[4]) Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen, Math. Annalen 1925, str. 290. Ta věta se ostatně najde v každé učebnici množinové topologie. U Kuratowského na str. 97 (I. díl) a u Alexandrova a Hopfa na str. 74 (I. díl), Hilfssatz.

Pokyn. Kdyby byly, pak by každá spojitá funkce na našem prostoru byla konstantní v okolí každého bodu. Komplementy těch okolí lze vzít uzavřené. Jejich prunik je prázdný. Z toho pomocí bikompakticity plyne že naše funkce nabývá vůbec jen konečně mnoha hodnot ve sporu s 12.

14. Je-li G otevřená v bikompaktním prostoru, pak vnitřní charaktery bodu množiny G nemohou být vesměs nespočetné.

15. Nechť S je množina všech bodů v bikompaktním P, které mají v P nejvýš spočetné vnitřní charaktery. Pak uzávěr množiny S v prostoru P je roven P.

16. Bikompaktní prostor P je buďto nejvýš spočetný anebo množina S definovaná v 15 je nespočetná.

Pokyn. Kdyby S byla spočetná, pak by z tvrzení 15 plynulo, že mimo ni leží přece jenom ještě další body s nejvýš spočetnými vnitřními charaktery v P.

17. Je-li F uzavřená nekonečná část bikompaktního P, pak vnitřní charaktery v P bodu množiny F nemohou být vesměs nespočetné.

18. Je-li F uzavřená a G otevřená část bikompaktního P, FG v sobě hustá,[5]) pak vnitřní charaktery v P bodů množiny FG nemohou být vesměs nespočetné.

19. Nechť F je v sobě hustá uzavřená část prostoru P, S definována jako v 15. Pak uzávěr v P množiny FS je roven F.

20. Předpoklady jako v 19. Pak množina FS je nespočetná.

V 20 ještě předpokládejte, že F je nespočetná. Nevyslovuji to mezi předpoklady proto, že to plyne z ostatních předpokladů, což prozrazuji bez dukazu i odkazu.

[5]) Část T prostoru P nazývá se v sobě hustá, když pro každou v P otevřenou U je TU buďto prázdná anebo nekonečná.