Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

August Seydler

Poznámka k t. zv. Petrohradskému problému

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 19 (1890), No. 6, 277--281

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122024

Na levé straně: *Jednota českých mathematiků;* na pravé straně: *Svému čestnému členu.* Věnce položili na hrob: Jednota českých mathematiků, řed. Šimerka, politický spolek a Sokol kuklenský. Slavnostní komitét obecní, jehož horlivým místním jednatelem byl p. učitel *Doležal,* zasluhuje za vše, co učinil pro zdar slavnosti, vděčného uznání. *Augustin Pánek.*

Poznámka k t. zv. Petrohradskému problému.

Napsal

dr. **A. Seydler.**

Počet pravděpodobnosti poskytuje četná paradoxa, jež nás zvláštnostmi svými vábí a k řešení pobízejí. Zvláště zajímavým jest problém Petrohradský, Mik. Bernoullim r. 1713 položený; může se vysloviti takto:

Osobo A vrhne vzhůru peníz se znamením *hlava* a *písmo* a platí osobě B určitou sázku, řekněme 1, padne-li při *prvním* vrhu písmo, v kterémž případě jest hra ukončena. Padne-li hlava, hraje se dále, a padne-li při *druhém* vrhu písmo, obdrží B 2, v kterém případě jest hra opět ukončena. Padne-li i při druhém vrhu hlava, hraje se dále, zkrátka hraje se až k tomu, řekněme x-tému vrhu, při kterém se *ponejprv* objeví písmo, při čemž B obdrží 2^{x-1}, načež jest hra ukončena.*) Otázka jest: jakou hodnotu má mathematická naděje osoby B, t. j. jakou protisázku má B položiti na začátku hry, aby hra byla spravedlivou?

Hodnota mathematické naděje osoby B skládá se ze součtu hodnot částečných, jež má naděje na výhru při prvním, druhém, třetím, ... vrhu. Hodnoty ty jsou

$$\tfrac{1}{2}\times 1,\quad \tfrac{1}{4}\times 2,\quad \tfrac{1}{8}\times 4,\quad \tfrac{1}{16}\times 8,\ \ldots$$

---

*) Srv. *J. Bertrand* Calcul des probabilités (1889). Při této úpravě nepřipouští problém několikeré interpretace a tak jest také míněn, t. j. číslo x není napřed dáno, nýbrž přenecháno náhodě hry. Při původní formulaci Mik. Bernoulliho jsou možny tři výklady; viz vzhledem k předmětu tomu článek *A. Pánka* v VI. roč. str. 74 a násl. tohoto časopisu.

tedy vesměs $\frac{1}{2}$, a počet jejich jest nekonečný, poněvadž pravděpodobnosť, že po sebe větším počtu vrhů vyjde písmo jest sice nesmírně velká, nerovná se však nikdy jistotě.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots \text{ do nekonečna } = \infty,$$

t. j. má-li hra býti spravedlivou, musí protisázka osoby B býti nekonečně velkou. Kdo by však odvážil, praví *Bertrand*, i jen 100 fr. na podobnou hru?

Patrně tu nesmírně málo pravděpodobné výhry svým v obráceném poměru pravděpodobnosti rostoucím obnosem stále stejným způsobem přispívají ku vzrůstu mathem. naděje. B mohl by se vzdáti svých nároků na výhru, kdyby se písmo objevilo v prvních 100, 1000, 1000000 vrzích, a přece by musil vsaditi stejně mnoho, t. j. nekonečný obnos, čímž se paradoxon stává ještě divnějším — a přece jest výsledek úplně správným. Vyhraje-li z 1000000 losů jeden 1000000 zl., ostatní nic, musí se ve hře *spravedlivé* los kupovati a prodávati za 1 zl., jiná jest však otázka, je-li to *rozumno*, tak nesmírně malou naději na výhru zaplatiti téměř úplnou jistotou, že jsme 1 zl. vyhodili. Tuto okolnosť má tedy Petrohradský problém s každou jinou hazardní hrou společnou; výsledek jest nepochybný — a přec zbývá nám jakýsi stín pochybnosti. Ještě kdyby se mohla hra opakovati; tak ale je skončena snad ve 4, 5, 10 vrzích, B obdrží několik zl., když byl dříve vsadil ∞ ! Odvolání na morální naději též neuspokojí — tato appeluje na lidský cit, na zvláštní strukturu psychickou, která může ale nemusí býti taková jaká jest.

Za těch okolností nezdá se mi zcela zbytečným, ukázati, že jest Petrohradský problém zvláštním případem následujícího problému, s nímž se ostatně někdy i směšuje:

A a B ustanoví, že má býti celá hra ukončena n-tým vrhem, a že se má skládati z částečných her tak, že každá částečná hra jest ukončena objevením se písma, vyjímajíc poslední, kterou končí n-tý vrh celé hry, ať vynáší vrh ten písmo neb hlavu. Pro každou částečnou hru platí pravidlo dřívější, t. j. skládá-li se hra ta z m vrhů, obdrží B výhru 2^{m-1} (vyjímajíc poslední částečnou hru, končí-li hlavou). Objasníme to příkladem a označíme hlavu 0, písmo 1; při $n = 10$ vrzích může míti celá hra průběh na př.

$$01,1,0001,01,0$$

tak že se skládá z 5 částečných her o 2, 1, 4. 2, 1 vrzích se 4 výhrami 2, 1, 8, 2.

Můžeme se nyní tázati:

a) Jaká jest math. naděje osoby B, nebo-li sázka její $f(n)$ při celé hře?

b) Jaký jest pravděpodobný počet $\varphi(n)$ částečných her, z nichž se celá hra skládá?

Sázka pro libovolnou částečnou hru (ovšem dokud hra ještě nezačala), tedy také pro *první* částečnou hru jest pak patrně:

$$N = \frac{f(n)}{\varphi(n)}.$$

Při n vrzích jest možno 2^n různých případů hry. Spočítejme všechny výhry, jež by osoba B obdržela, kdyby se celá hra 2^n-krát opakovala a při tom všechny možné případy vystřídaly, a budiž $F(n)$ nalezený součet. Pak jest

$$F(n) = 2^n f(n).$$

Nyní si snadno zjednáme vztah mezi $F(n)$ a $F(n+1)$. Kdyby počet ujednaných vrhů obnášel $n+1$ místo n, zdvojnásobnil by se počet možných případů; můžeme je odvoditi z dřívějších 2^n případů platných pro n vrhů, přidáme-li k nim, ať na začátku ať na konci, jednou hlavu (0), podruhé písmo (1), čímž obdržíme patrně 2^{n+1} případů.

Z 2^n možných variací n vrhů

má jich	2^{n-1}	tvar:	$1aa'a''\ldots$
„ „	2^{n-2}	„	$01bb'\ldots$
„ „	2^{n-3}	„	$001c\ldots$
. . .	. . .	. . .	. . .
„ „	8	„	$000\ldots01xx'x''$
mají	4	„	$000\ldots001yy'$
mají	2	„	$000\ldots0001z$
má	1	„	$000\ldots00001$
má	1	„	$000\ldots00000.$

Připojme na začátku hlavu (0). Tím se zdvojnásobí hodnota první výhry; k původnímu součtu všech výher $F(n)$ se připojuje tudíž

$$2^{n-1} + 2 \cdot 2^{n-2} + 4 \cdot 2^{n-3} + \ldots + 2^{n-2} \cdot 2 + 2^{n-1} \cdot 1 = n \cdot 2^{n-1}.$$

Připojme na začátku písmo (1). Tím se připojí celkem k součtu $F(n)$ summa 2^n. Jest tudíž konečně

$$\begin{aligned} F(n+1) &= F(n) + n \cdot 2^{n-1} + F(n) + 2^n \\ &= 2\,F(n) + (n+2)\,2^{n-1}, \end{aligned}$$

aneb

$$2^{n+1} f(n+1) = 2^{n+1} f(n) + (n+2) \cdot 2^{n-1},$$

$$f(n+1) = f(n) + \frac{n+2}{4}.$$

Tato funkcionalná rovnice poskytuje patrně řešení

$$f(n) = \frac{n(n+3)}{8}$$

uvážíme-li, že musí býti

$$f(1) = \frac{1}{2}.$$

Podobným způsobem můžeme určiti funkci $\varphi(n)$ tj. průměrný počet částečných her. Ve všech 2^n možných variacích n vrhů nechť se vyskytuje $\Phi(n)$ částečných her, takže jest

$$\Phi(n) = 2^n \cdot \varphi(n).$$

Připojením hlavy (0) na začátku nerozmnožíme počet ten o nic; připojením písma (1) rozmnožíme jej o 2^n, takže jest

$$\Phi(n+1) = 2\,\Phi(n) + 2^n,$$

tedy

$$\varphi(n+1) = \varphi(n) + \frac{1}{2},$$

funkcionalná rovnice, jejíž řešení jest patrně

$$\varphi(n) = \frac{n+1}{2}$$

vzhledem k tomu, že musí býti

$$\varphi(1) = 1.$$

Částečná sázka vzhledem k jakékoli částečné hře má tudíž při spravedlivé hře obnášeti:

$$N = \frac{f(n)}{\varphi(n)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)} > \frac{n}{4},$$

kterážto veličina s rostoucím n stále roste.

Petrohradský problem obmezuje se na první částečnou hru, ale klade patrně $n = \infty$; spravedlivá sázka pro tuto hru jest tudíž $N = \infty$.

Není snad zbytečno, srovnati nalezený výsledek s pokusem. Pro $n = 10$ jest:

$$f(n) = 16{\cdot}25, \quad \varphi(n) = 5{\cdot}5, \quad N = 2{\cdot}95.$$

Při 10 hrách nalezeny co *skutečné* výhry, *skutečné* počty částečných her a poměry obou čísel:

$f(n)$:	13,	9,	8,	12,	10,	36,	11,	11,	22,	21
$\varphi(n)$:	7,	9,	7,	5,	7,	4,	6,	6,	3,	5
N :	1·9,	1·0,	1·1,	2·4,	1·4,	9·0,	1·8,	1·8,	7·3,	4·2.

Průměrné hodnoty těchto veličin jsou tudíž

$$f(n) = 15{\cdot}3, \quad \varphi(n) = 5{\cdot}9, \quad N = 3{\cdot}19,$$

což jest při tak malém počtu pokusů dostatečný souhlas.

Rozbor Huyghensova spisu: Traité de la lumière.

Napsal

Frant. Nušl v Praze.

Bylo by nesnadno dnes určitě stanoviti dobu, kdy poprvé vyslovena byla domněnka, že světlo záleží v pohybu jisté látky. Nalezáme ji již v rukopisech *Leonharda da Vinci* a v listech *Galileiho*, avšak můžeme se domnívati, že jest ještě mnohem starší. Byl-li oheň v počátcích filosofie řecké považován brzo za látku, brzo za pohyb, nejsme tu již daleko od úsudku, jímž tyto výklady možno rozšířiti i na světlo, kteréž jest nejobyčejnějším průvodcem ohně. Z pozdějších filosofů vyslovil podobnou domněnku *Descartes*. Domnívá se totiž, že prostor absolutně