Jan Roháček

Geometrické místo středů kolineací, které danou kuželosečku převádějí ve svazek kružnic

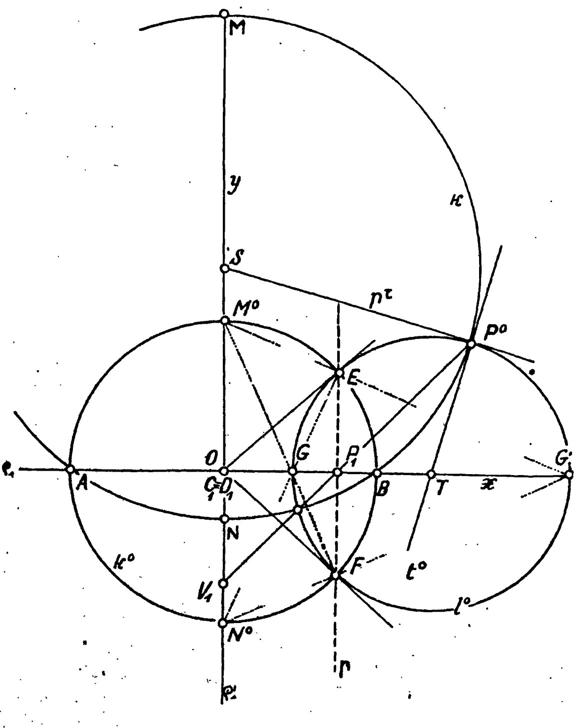
Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 63 (1934), No. 3, R36--R40

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122152

Geom. místo středů kolineací, které danou kuželosečku převádějí ve svazek kružnic.

Dr. *Jan Roháček.*

Mějme dvě roviny ϱ a σ, které stojí na sobě kolmo a protínají se v ose x. V jedné rovině ϱ zvolme kuželosečku na př. elipsu e tak, že její hlavní osa $AB = 2a$ nalézá se v ose x, nebo je s ní rovno-



Obr. 1.

běžná tak, aby reálně protínala osu x ve dvou bodech I, J. Těmito základními body v rovině σ je dán svazek kružnic o ose y, jdoucí bodem O, který je současně průmětem vrcholů vedlejší osy elipsy C, D.

Každou kružnici k svazku možno nyní přiřadit kolineací podle osy x a určitého středu V k pevné elipse e. Bodům C, D elipsy přináležejí patrně body M, N kružnice k, ve kterých přímka y seče kružnici. Spojnice (MC, ND) resp. (MD, NC) určují pak hledaný střed kolineace V resp. V'. Stanovme geom. m. těchto středů V, mění-li kružnice k ve svazku svoji polohu.

Určitému bodu P^0, na kružnici k vytknutému, odpovídati bude v kolineaci bod P elipsy e. Tečně t^0 odpovídá tečna t, jejíž průmět kryje se s osou x. Stopník této tečny T je v průsečíku t^0 s x a jeho polára p vzhledem k elipse, nebo vzhledem ke kružnici afinní k^0, opsané nad velkou osou AB, vytíná na ose x sdružený pól P_1, který je společným průmětem dvou bodů elipsy, odpovídajících bodu P. Polára p seče základní kružnici k^0 ve dvou reálných bodech E, F a z délky EP_1, zkrácené podle poměru poloos b/a, možno výšku bodu P stanoviti. Jak patrno z obrazu (obr. 1) možno tedy bod P_1 obdržeti přímo polárou bodu T vzhledem k vytknuté kružnici k. Bod P i jeho průmět P_1 se nemění pokud bod T je pevný, čili délka tečny TP stálá, to ale znamená, že bodu P na elipse odpovídají v kolineacích všechny body kružnice l^0, která svazek kružnic k seče ortogonálně a jejímž středem je bod T. Kružnice l^0 a bod P jako vrchol tvoří kruhový šikmý kužel, jehož površky tvoří spojnice PP^0; průsek kužele s rovinou ϱ', proloženou přímkou y kolmo k σ, je hledaným geom. m. středů kolineací V. Průsekem je hyperbola, neboť rovina položená vrcholem P rovnoběžně s ϱ' protíná kužel ve dvou povrchových přímkách PE, PF, s nimiž jsou asymptoty hyperboly rovnoběžné. Ježto stopy tečných rovin podél těchto površek protínají se ve středu O, je střed elipsy zároveň středem hyperboly. Povrchové přímky PG, PG' kužele, ležící v rovině elipsy ϱ, protínají rovinu ϱ' ve vrcholech C, D hyperboly, neboť spojnice GE, $G'F$ procházejí body M^0, N^0 na kružnici k^0 a délky ty jsou v elipse afinně přidruženy. Úhel asymptot je dán tg $\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}P_1E = a/b$ a ježto $a_1 = b$, je $b_1 = a$. Tedy vidíme, že geom. m. bodů, z nichž elipsa promítá se do roviny do svazku kruhového, je hyperbola v rovině na elipsu kolmé o společném středu, společných vrcholech C, D a vyměněných poloosách.

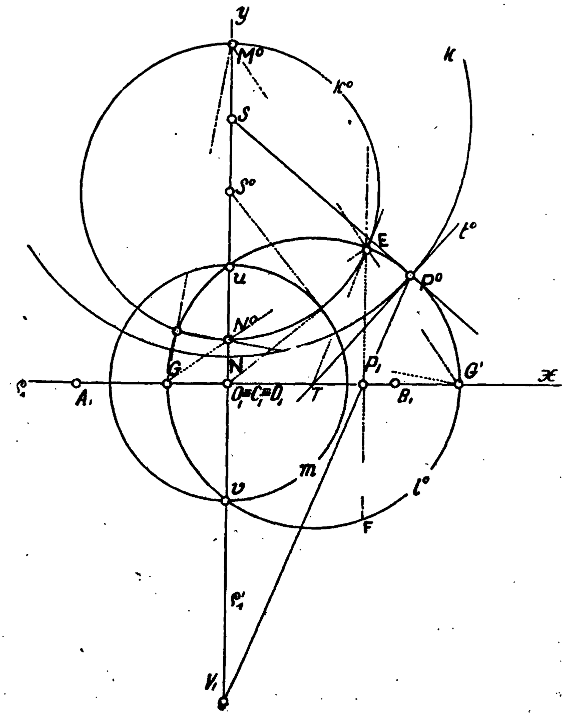
Ježto stopa tečné roviny kužele podél povrchové přímky PP^0 prochází středem S kružnice k, vidíme, že tečna příslušného centra V hyperboly má svoji stopu ve středu příslušné kružnice.

Kružnice l, sekoucí svazek kružnic k ortogonálně tvoří svazek kružnic o imaginárních základních bodech, když elipsa osu x seče reálně; neseče-li osu x reálně má svazek kružnic l reálné základní body. Tyto body jsou průsečíky hyperboly s osou y. Do svazku kružnic l promítá se opět hyperbola z bodů elipsy e.

Dotýká-li se elipsa e roviny σ v bodě D (obraz se ponechává čtenáři) pak svazek kružnic k dotýká se v tomto bodě osy x a svazek kružnic l, do něhož se hyperbola promítá, dotýká se opět osy y v témže bodě D.

Neprotíná-li elipsa e osu kolineační reálně, nýbrž imaginárně v bodech I, J (obraz 2), bude jí odpovídati v kolineacích v rovině σ

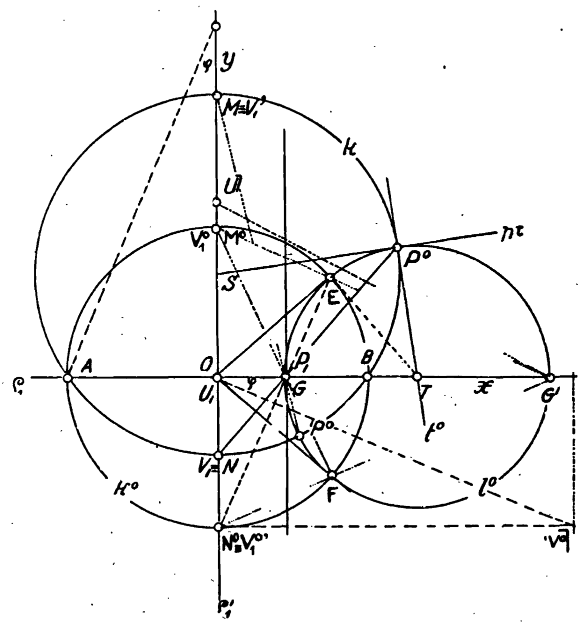
svazek kružnic k o imaginárních základních bodech I, J. Tomuto svazku patří také kružnice k^0 o středu S^0 a poloměru $= a$, do níž promítá se elipsa z úběžného bodu U^∞, jakožto průsečíku rovnoběžných spojnic MC, ND. Střed S^0 možno sestrojiti podle úměry $z_O : z_S = a : b$, kde z_O je výška středu elipsy a z_S je vzdálenost hledaného středu S^0 od osy x.



Obr. 2.

Kružnicí k^0 je kruhový svazek k dán. Vytkneme-li nyní v tomto svazku jakoukoliv kružnici k o středu S a na ní libovolný bod P^0, přináleží mu na elipse kolineární bod P, jehož průmět P_1 se nalézá na ose x. Abychom jej sestrojili, veďme opět tečnu t^0 v bodě P^0 ke kružnici k a vytkněme její stopník s osou $x \ldots T$. Z tohoto vedená tečna ke kružnici k^0 má dotyčné body E, F a délku rovnou TP^0; jsou to body do nichž promítá se bod P elipsy z úběžných bodů. Spustíme-li tedy kolmici z E resp. F na osu x, obdržíme průmět P_1 sdruženého bodu na elipse. Spojnice PP^0 vytíná pak opět na y průmět hledaného centra V; body takové jsou opět dva, jedním promítá se elipsa do k a druhým do k' souměrně položené podle osy x.

Geom. m. bodů V je opět hyperbola, neboť kružnice l^0 opsaná z bodu T a kolmo svazek kružnic k protínající je podstavou kuželové plochy o vrcholu P a rovina $\varrho'_1 \equiv y$ seče jej v hyperbole, jejíž asymptoty jsou rovnoběžné s povrchovými přímkami EP, FP; tečné roviny podél těchto površek mají stopy ve spojnicích S^0E, S^0F, takže středy S^0, $S^{0\prime}$ jsou stopníky asymptot na ose y a ježto do



Obr. 3.

středu S^0 promítá se střed elipsy z úběžného bodu, je střed hyperboly totožný se středem elipsy. Povrchové přímky PG, PG' kuželové plochy sekou rovinu ϱ' ve vrcholech C, D hlavní osy hyperboly.

Kružnice l tvoří svazek ortogon. kružnic, do něhož se promítá hyperbola z bodů elipsy e. Tomuto svazku přináleží též nejmenší kružnice m, která seče osu y v nulových kružnicích u, v, v bodech to, v nichž hyperbola seče reálně osu y.

Je-li elipsa nahrazena kružnicí, pak příslušná hyperbola je rovnoosou.

Je-li konečně elipsa v rovině ϱ vyměněna parabolou p (obr. 3) s osou kolmou k σ, vrcholem U a protínající osu x nejprve ve dvou reálných bodech A, B, pak v rovině jakákoliv kružnice k o středu S

a libovolného poloměru SP^0 procházející body A, B může býti kolineárně parabole přiřazena: střed kolineace V je opět v průsečíku spojnice MU s kolmicí v N na σ vztyčenou (body M, N jsou koncové body průměru kružnice k v ose y), ježto tato kolmice je spojnice bodu N s úběžným bodem paraboly: $MU \times NU \equiv V$, resp. $MU \times NU \equiv V'$.

Mění-li kružnice k ve svazku polohu, vyplňují body V geometrické místo. Jak vidno, jsou průměty bodů V vždy v bodech M, N. Zvolíme-li na př. na kružnici bod P^0, pak jemu bude odpovídati v kolineaci na parabole bod P, jehož průmět P na ose x obdržíme v průsečíku spojnic NP^0, resp. P^0M. Svazku kružnic k patří kružnice k^0 nad průměrem AB opsaná; tuto seče kružnice l^0 o středu T a poloměru rovném délce tečny TP^0 ortogonálně v bodech E, F, do nichž promítá se bod P z bodů V^0, $V^{0\prime}$, jejichž průměty jsou v bodech M^0, N^0, ve kterých k^0 seče osu y; lze tedy body P_1 jednotlivě rýsovati pomocí pevné kružnice k^0 a proměnlivé kružnice l. Kružnice l tvoří druhý svazek. Kružnice l^0 a bod P určují opět kuželovou plochu ortogonálnou s površkou PP_1 kolmou k σ. Rovina ϱ' jsouc s tečnou rovinou podél površky PP_1 rovnoběžná, seče kuželovou plochu v parabole p', jakožto geom. m. středů kolineací V, které danou parabolu p převádějí ve svazek kružnic k. Obě paraboly jsou shodné, neboť mají společnou osu, týž vrchol U a stejný parametr (do bodů M^0, N^0 promítá se vrchol U z bodů V^0, $V^{0\prime}$ paraboly p', kteréžto body mají dvojnásobnou výšku nad σ jako U; tečny k parabole p' v bodech V^0, $V^{0\prime}$ jsou průsečnicemi roviny ϱ' s rovinami tečnými kuželové plochy podél površek PE, PF, stopy těchto rovin protínají se ale v bodě U). Tedy paraboly jsou shodné o společném vrcholu a o 90^0 otočené, z bodů jedné z nich promítá se druhá do svazků kruhových.

Kdyby roviny ϱ, σ nestály na sobě kolmo a daná elipsa určena byla sdruženými průměry, pak postup řešení by byl týž a přidružené kuželosečky (hyperboly) obdrželi bychom ve průměrech sdružených.

Steinerovy elipsy.

Prof. Dr. *V. Sukdol.*

Rovnice kuželosečky v trimetrických souřadnicích*) zní

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0. \quad (1)$$

Pro převod souřadnic trimetrických na pravoúhlé platí transformační rovnice

*) Viz článek prof. Karla Koutského v *Rozhledech*, roč. II, str. 147.