Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Miloš Kössler

Vztah mezi počtem prvočísel v daných mezích a větou Wilsonovou

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 44 (1915), No. 1, 38–42

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122377

Podobně pro polohu polár k libovolnému průměru d platí:

$$(dl)\frac{\sin \widehat{dl'}}{\sin \widehat{\Delta l'}} = (dl')\frac{\sin \widehat{dl}}{\sin \widehat{\Delta l}} = \varkappa_d,$$

jelikož veličiny (dl), $\widehat{dl'}$, $\widehat{\Delta l'}$ resp. (dl'), $\widehat{dl}$, $\widehat{\Delta l}$ jsou vyjádřeny kterýmkoliv párem paprsků svazku A, jenž stanoví souřadnice $(r\delta)$ a současně polohu paprsků komplexu, které kolmo protínají paprsek h.

V posledním vzorci zachovává $\varkappa_d$ vždy totéž znamení za týchž podmínek, jak bylo ukázáno; nezávisí však, jak Sturm uvádí, na tom, je-li involuce mimoběžek (dd'_∞, ll') elliptická nebo hyperbolická.

Vztah mezi počtem prvočísel v daných mezích a větou Wilsonovou.

Napsal **M. Kössler.**

Pro určení počtu prvočísel v daných mezích sestavena byla řada vzorců buď jen empirických (Gauss, Legendre, atd.) nebo s různou přesností analyticky odvozených. Tyto opírají se většinou o práci *Riemannovu*, spočívající na vlastnostech ζ funkce, jiné opět užívají vztahů mezi součtem přirozených logarithmů všech celých čísel $\leqq A$ a podobným součtem všech prvočísel $\leqq A$.*)

Postup, jímž se v těchto pracích k výsledku dospívá, jest jedním z nejsložitějších a nejobtížnějších v dějinách vědy.

Úlohu možno pokládati za zvláštní případ problemu Polignacova**), který zní:

---

*) Viz přehledný referát v Enzyk. der Math. Wiss. Riemannova theorie jest podrobně vyložena ve dvou svazcích díla: Ed. Landau: Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. Teubner. 1909.

**) Compt. rend. 1859. II.

„Pro danou funkci $f(x)$ nalézti analytický výraz pro součet

$$\sum_A^B f(p) = f(p_1) + f(p_2) + f(p_3) + \ldots + f(p_k), \ldots (a),$$

značí-li $p_1, p_2, p_3, \ldots . p_k$ všechna prvočísla $\geqq A$ a $\leqq B$".*)

Polignac udává nijak neodůvodněnou formuli

$$\sum_A^B f(p) = \int_A^B \frac{f(x)}{\log x} dx.$$

Vzorec tento jest podle Riemannovy theorie přibližně správným pro $f(x) = 1$, t. j. pro počet prvočísel v daných mezích. Pro jiné tvary funkce $f(x)$ není ani jeho přibližná platnost nijak prokázána. Pokud jest mi známo, nebyl dosud problem Polignacův ve své všeobecnosti přesně analyticky řešen.

Pojednání toto obsahuje žádané řešení v přesném tvaru a z theoretického hlediska zcela postačující. Jsou to vzorce (5) a (6). K praktickému výpočtu se formule ty ovšem nehodí, aspoň ne v té formě, kterou prozatím mají. Nápadnou jest při tom jednoduchost výsledných vzorců, která právě skýtá naději, že během doby bude možno i prakticky vytěžiti odvozené výsledky. O výhodnosti použité methody svědčí ta okolnost, že lze jí použíti i na úlohy obecnější, jako n. př. k určení počtu prvočísel v určitém počtu členů dané řady arithmetické a na podobně sevšeobecněný problem Polignacův (vzorec (7)).

---

1. Věta Wilsonova zní:

„Je-li p prvočíslo, jest $(p-1)! + 1$ dělitelno číslem p."

Věta ta splněna jest jen pro prvočísla, neboť značí-li p číslo složené, jest $(p-1)!$ tímto číslem dělitelno a tedy dává $(p-1)! + 1$ děleno číslem p zbytek 1.

Platí tedy vzorce:

$$\frac{(p-1)!}{p} = a - \frac{1}{p} \text{ (} p \text{ prvočíslo)}$$

$$\frac{(p-1)!}{p} = b, \text{ (} p \text{ složené číslo)}$$

*) A, B jsou čísla celistvá.

kdež a, b jsou celistvá kladná čísla, z nichž prvé jest liché, protože $(p-1)! = ap - 1$ jest pro liché p číslem sudým.

Z toho plyne

$$\left.\begin{aligned} \sin \pi \frac{(p-1)!}{p} &= o \qquad (p \text{ složené}) \\ \sin \pi \frac{(p-1)!}{p} &= \sin \frac{\pi}{p} \qquad (p \text{ prvočíslo}) \end{aligned}\right\} \ldots (1)$$

V těchto výrazech vyskýtá se jen pro celistvé p definovaný člen $(p-1)!$, který pro další počet nutno nahraditi spojitou funkcí. Takovou fukcí jest $\Gamma(z)$, která pro celistvou a kladnou hodnotu argumentu z má právě hodnotu $(z-1)!$ Funkce tato jest analytickou pro všechna z, jichž reálná část jest větší než nulla.

Utvoříme funkci

$$\varrho(z) = \frac{\sin\left(\pi \frac{\Gamma(z)}{z}\right)}{\sin \frac{\pi}{z}}, \ldots . (2)$$

která jest analytickou pro všechna z, jichž reálná část jest větší než 1, neboť čitatel i jmenovatel výrazu (2) jsou v uvedeném oboru funkce analytické a mimo to jmenovatel $\sin \frac{\pi}{z}$ v oboru tom nemá nullových bodů. Funkce $\varrho(z)$ nemá tam tedy ani pólů ani bodů singulárních, vyloučíme-li ovšem z úvahy bod nekonečný. Takto definovaná funkce $\varrho(z)$ má značný číselně theoretický význam. Podle vzorců (1) jest totiž pro celistvé a kladné $p > 2$

$$\left.\begin{aligned} \varrho(p) &= o \quad (p \text{ složené}) \\ \varrho(p) &= 1 \quad (p \text{ prvočíslo}) \end{aligned}\right\} \ldots . (3)$$

Opírajíce se o tuto vlastnost ϱ funkce, můžeme problem Polignacův pokládati za řešený formulí:

$$\sum_A^B f(p) = \varrho(A) f(A) + \varrho(A+1) f(A+1) + \\ + \varrho(A+2) f(A+2) + \ldots + \varrho(B) f(B), \ldots \quad (4)$$

kdež levá strana rovnice má symbolický význam určený vzorcem (a).

Pravé straně rovnice můžeme dáti tvar sevřenější, užijeme-li buď součtového vzorce Euler-Maclaurinova nebo formule Plana-Abel-Cauchyovy. Vzorce tak získané nehodí se však nijak k číselnému výpočtu, protože neznáme dosud žádného jednoduchého rozvoje pro ϱ funkci. Omezíme se zde proto na poměrně nejjednodušší a jen theoretický význam mající sečtení řady na pravé straně rovnice (4).

Budiž C uzavřená integrační křivka, ležící celá v konečnu a na pravo od přímky $x = 1$ a objímající body

$$A, A + 1, A + 2, \ldots B,$$

mimo ně však žádný bod, odpovídající nějakému jinému celistvému číslu.

O funkci $f(z)$ předpokládejme k vůli jednoduchosti, že jest uvnitř a na křivce C analytickou. Funkce $\pi \operatorname{cotg} \pi z$ má ve všech bodech, odpovídajících celistvým číslům jednoduché poly s residuem 1 a tedy má funkce

$$\pi \operatorname{cotg} \pi z \,.\, \varrho(z) f(z)$$

v takovém bodu q residuum

$$\varrho(q) f(q),$$

protože $\varrho(z) f(z)$ jest tam funkcí analytickou. Jest tedy

$$\sum_A^B f(p) = \sum_{n=A}^{n=B} \varrho(n) f(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \pi \operatorname{cotg} \pi z \,.\, \varrho(z) f(z)\, dz \ldots (5)$$

Klademe-li na př. $f(z) = 1$, představuje $\sum\limits_A^B 1$ počet prvočísel v mezích A až B. Jest pak

$$\sum_A^B 1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C \pi \varrho(z) \operatorname{cotg} \pi z\, dz, \quad \ldots . (6)$$

kterýžto vzorec jest jistě ze všech vzorců počet ten udávajících formálně nejjednodušší.

2. Methoda předcházejícího odstavce dá se užíti k řešení problemu ještě obecnějšího, nežli jest Polignacův.

Nechť značí nyní $p_1, p_2, p_3, \ldots p_k$ všechna prvočísla, obsažená mezi členy arithmetické řady

$$A,\ A+d,\ A+2d,\ A+3d,\ \ldots\ B-d,\ B,$$

kdež A, d, B jsou čísla celistvá a kladná.

Hledejme součet

$$\sum_A^B{}^d f(p) = f(p_1) + f(p_2) + f(p_3) + \ldots + f(p_k), \ldots (b)$$

kde $f(x)$ značí danou funkci. Patrně jest opět jako při vzorci (4)

$$\sum_A^B{}^d f(p) = \varrho(A)\,f(A) + \varrho(A+d)\,f(A+d) +$$

$$+ \varrho(A+2d)\,f(A+2d) + \ldots + \varrho(B)\,f(B),$$

kdež pravá strana může býti nahražena integrálem dle křivky, v němž však vystupuje místo $\pi \operatorname{cotg} \pi z$ člen $\frac{\pi}{d} \operatorname{cotg} \pi \frac{z-A}{d}$. Tento výraz má jednoduché poly v bodech A, $A+d$, $A+2d$ atd. s residui 1. Tak obdržíme rovnici analogickou formuli (5):

$$\sum_A^B{}^d f(p) = \frac{1}{2\pi d i}\int_C \pi\varrho(z)\, f(z) \operatorname{cotg} \pi \frac{z-A}{d}\, dz \ldots (7)$$

Klademe-li na př. $f(z) = 1$, obdržíme vzorec pro počet prvočísel obsažených mezi čísly A, $A+d$, $A+2d$, $\ldots$ B.

Vzorce odvozené nehodí se k výpočtu praktickému z toho jediného důvodu, že neznáme dosud takové vyjádření funkce $\varrho(z)$, které by připouštělo provedení naznačené integrace. Zdá se však pravděpodobným, že funkce $\varrho(z)$ dá se rozvinouti v Dirichletovu řadu formy:

$$\varrho(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-l_n z},$$

kdež l_n jsou reálné konstanty $> o$ seřazené dle velikosti, takže od určitého n počínaje jest $l_{n+1} > l_n$. Důkaz tohoto tvrzení prozatím podati nedovedeme, což činí zbytečným každé odvozování dalších vzorců.