Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Karel Vodička

O geometrických a fysikálních methodách k určení parallaxy sluneční. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 40 (1911), No. 2, 195--213

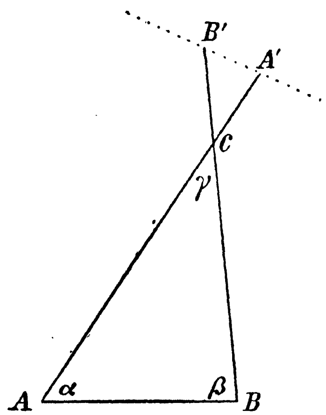
Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122399`

O geometrických a fysikálních methodách k určení parallaxy sluneční.

Dr. Karel Vodička.

I. Problém tvaru a velikosti země, definice parallaxy.

Pojem parallaxy. Parallaxou rozumíme úhel, který svírají dva směry (obr. 1.) z míst A a B k témuž bodu C vedoucí, tedy zorný úhel, pod kterým z bodu C vidíme základnu $\overline{AB}$. Upotřebení její jest dvojí. Za prvé ze známé parallaxy můžeme



Obr. 1.

počítati vzdálenost pozorovaného objektu. Známe-li totiž základnu, parallaxu a ku př. úhel β, který změříme theodolitem, jest vzdálenost

$$\overline{AC} = \overline{AB}\,\frac{\sin\beta}{\sin\gamma},$$

a relativní chyba při tom určena výrazem

$$\frac{\partial\overline{AC}}{\overline{AC}} = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial\overline{AB}}{\overline{AB}}\right)^2 + \left(\frac{\partial\beta}{tg\,\beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial\gamma}{tg\,\gamma}\right)^2}.$$

Protože při astronomických měřeních bývá zpravidla β skoro 90^0, rozhoduje o přesnosti výpočtu pouze úhel γ, který

— je-li malý — musí býti znám s velikou přesností, má-li se vzdálenost objektu C určiti poněkud správně. Pro tento účel zavedl parallaxu již *Hipparchos* a způsobem tím určována hlavně výška mraků, létavic a severní záře. Aby výsledky byly uspokojivé, nesmí základna přesahovati 100 *km*.

Druhý význam parallaxy odvodíme z toho, že tělesa v různých vzdálenostech v prostoru se nalézající promítáme dle zákonů perspektivy na společné pozadí. Změní-li ku př. pozorovatel bodu C na základně $\overline{AB}$ své místo z A do B, změní bod C na pozadí $A'B'$ své místo směrem opačným, a pošinutí to, určené úhlem γ, bude tím větší, čím větší bude základna AB a čím menší bude vzdálenost bodu C od pozorovatele. Je-li vzdálenost neměnitelná, nutno voliti základnu přiměřeně velikou, aby úhel γ nabyl konečné a měřitelné hodnoty.

Tělesa nebeská promítáme na sféru a posice jejich závisí jednak na poloze pozorovacího místa na povrchu zemském, jednak na posici země v prostoru. Jest tedy druhý význam parallaxy ten, že pomocí ní můžeme astronomická pozorování vybaviti z lokálních vlivů, že můžeme je redukovati na jisté body, které na rotaci nebo na revoluci země podílu neberou. Při tom nutno vhodně zvoliti základnu, aby příslušná parallaxa byla vůbec měřitelnou, a stanoveno bylo toto:

Pro tělesa, která nenáleží sluneční soustavě, zvolen za základnu poloměr dráhy zemské, t. j. pozorování stálic v různých dobách ročních redukují se na střed slunce a příslušná parallaxa nazvána parallaxou *roční čili stálic*. Její existence jest nezvratným důkazem revoluce země.

Pro tělesa naší sluneční soustavy zvolen za základnu poloměr zemský, pozorování oběžnic, měsíců jejich, komet a létavic v různých dobách denních redukují se na střed zemský, čímž jest umožněno pozorování na různých místech povrchu zemského vykonaná spolu srovnávati a výsledků užiti ke zkoumání zákonů jejich pohybů. Příslušná parallaxa zove se parallaxou *denní*, ježto lze ji z rotace země vyvoditi, nebo pouze parallaxou. V dalším bude jednáno jen o této a na svém místě bude podáno rozšíření tohoto důležitého pojmu v moderní astronomii. Jest však patrno, že bude parallaxa funkcí tvaru a rozměrů zemských, a proto v prvé řadě přihlédneme k otázce, co jest naše země.

O tvaru země. *Řešení Clairautovo.* Povrch země, jak pozorování jest přístupný, není schopen geometrické definice a chceme-li ho analytickým způsobem vyjádřiti, idealisujeme ho, t. j. nepřihlížíme k různým deformacím způsobeným horstvem, které maximálně dosahují 0·1% poloměru zemského a valně celkový tvar nemění, jak na př. vidíme v díle *Linggově* „Das Erdprofil" (Mnichov, 1886). O tvaru tohoto idealisovaného povrchu vysloveny byly různé domněnky, a ačkoliv již *Pythagorovci* (kolem 500 př. Kr.) učili, že země jest koule, a ačkoliv již *Aristoteles* podal tři důkazy pro kulový tvar zemský, přece náhled tento ve středověku upadl v zapomenutí, až opět studium Aristotela náhled ten znova uplatnilo a přimělo pak Columba k jeho cestě do Indie směrem západním.

S theoretickým odůvodněním kulovitého tvaru země setkáváme se teprve r. 1743 v díle *Clairautově*: „Théorie de la figure de la terre". Vyjdeme-li z okolnosti, že země byla původně ve stavu tekutém, jest tím problém tvaru země převeden na pole hydrostatické, a tu Clairaut podávaje první jasný názor o potenciálu dokazuje, že rovnováha jest jen tehdy možnou, dají-li se síly na tekutinu působící derivovati z jisté funkce posice.

Kdyby tekutá hmota země byla v klidu, vyjadřovaly by rovnováhu rovnice

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} = X, \quad \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} = Y, \quad \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} = Z,$$

kde p značí tlak, ϱ hustotu tekutiny. Rotuje-li však země kol osy z s angulární rychlostí ω, přistoupí k zevním silám X, Y, Z síly rotací vzniklé a rovnováhu vyjadřují pak rovnice:

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} = X + \omega^2 x, \quad \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} = Y + \omega^2 y, \quad \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} = Z.$$

Síly zevní mohou míti původ svůj jedině v koexistenci hmotných částiček zemských — abstrahujeme-li od vlivů ostatních těles nebeských — a dají-li se tedy derivovati z gravitačního potenciálu Π. Mají-li elementy hmoty zemské $m_1\,(x'_1 y'_1 z'_1)$, $m_2\,(x'_2 y'_2 z'_2)$, ... $m_i\,(x'_i y'_i z'_i)$ ... od jednotkového bodu potenciálového ($1(xyz)$ vzdálenosti r'_1, $r'_2, \ldots r'_i$ a působí-li bod m na bod potenciálový přitažlivou silou ve směru spojky a tvaru $k^2 \,.\, 1 \,.\, m_i \,.\, \varphi\,(r'_i)$, bude pro libovolné posunutí bodu potenciálového práce vykonaná se zřetelem na bod m_i, při této konfiguraci bodů $m_1, m_2 \ldots$ dána výrazem

$$-k^2 \,.\, 1 \,.\, m_i \int \varphi(r'_i)\, dr'_i,$$

a tedy práce k attrakci všech bodů m

$$\Pi = -\, k^2 \sum_1^i \left[m_i \int \varphi(r'_i) dr'_i \right].$$

Při tom posice všech bodů vztahují se na systém se zemí pevně spojený, ježto ve smyslu rovnic (1) přidáním komponent síly odstředivé mají se věci tak, jakoby země stála. Veličina Π jest funkcí souřadnic bodu potenciálového, její vzrost dán tedy relací

$$d\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z} dz,$$

a ježto dle principů mechanicky vzrost práce dán jest součtem prací jednotlivých komponent, t. j.

$$d\Pi = Xdx \,.\, + Ydy + Zdz,$$

jest patrně

$$X = \frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial \Pi}{\partial z}.$$

Komponenty síly odstředivé dají se derivovati z potenciálu tvaru

$$P = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2),$$

a označíme-li

$$W = \Pi + P,$$

přejdou rovnice (1) v rovnice

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial W}{\partial y}, \quad \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial z}, \tag{2}$$

čímž podmínka Clairautova splněna.

Aby integrace těchto rovnic byla možnou, nutno rozhodnouti o hustotě ϱ; kdyby tato byla konstantní, jest integrálem výraz

$$\frac{p}{\varrho} = W + const,$$

kdyby byla jen funkcí tlaku, který sám jest funkcí posice, byl by integrál

$$F(p) = W + const, \text{ čili } p = f(W + const).$$

V obou případech jsou plochy stejného potenciálu současně plochami stejného tlaku, a protože povrch zemský jest plochou stejného tlaku p_0, bude naopak také plochou stejného potenciálu. Žádná z učiněných supposic se však skutečnosti neblíží, rozdělení hustoty uvnitř země neznáme. *Legendre* sice položil

$$\varrho = \frac{\varrho_1}{r} \frac{\sin r q}{\sin q},$$

kde ϱ_1 značí hustotu nejhlubších vrstev, q konstantu a r vzdálenost od středu země, při čemž pro povrch země platí $r = 1$, *Roche* supponoval $\varrho = 10{\cdot}5\,(1 - 0{\cdot}8\,r^2)$, *Wandt* $\varrho = 11{\cdot}7\,(1 - 1{\cdot}16\,r^2 + 0{\cdot}39\,r^4)$, a patrně není ani vyloučeno, že hustota země není vůbec spojitou funkcí vzdálenosti od středu země. Integrace za těchto podmínek byla by v každém případě obtížnou, ba i nemožnou, a proto přijmeme supposici konstantního ϱ, pro niž integrál má tvar

$$\frac{p_0}{\varrho} - const = W = \Pi + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2). \tag{3}$$

Povrch zemský dovedeme tedy určiti, dovedeme-li najíti potenciál Π, který nabude tvaru

$$\Pi = k^2 \Sigma \frac{m_i}{r'_i},$$

akceptujeme-li gravitační zákon Newtonův.

Vedle několika speciálních případů lze stanoviti Π pro ellipsoid hmotou ϱ stejnoměrně vyplněný, a klademe si tedy otázku, zda ellipsoid o poloosách a, b, c nemůže býti rovnovážným tvarem zemským. Pro případ ten pro body uvnitř a na povrchu ellipsoidu má gravitační potenciál tvar (*Koláček*: Elektřina a magnetism, str. 61.)

$$\Pi = M - Ax^2 - By^2 - Cz^2,$$

$$\left.\begin{aligned}
M &= k^2\pi abc\varrho \int\limits_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}},\\
A &= k^2\pi abc\varrho \int\limits_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}},\\
B &= k^2\pi abc\varrho \int\limits_0^\infty \frac{d\lambda}{(b^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}},\\
C &= k^2\pi abc\varrho \int\limits_0^\infty \frac{d\lambda}{(c^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}},
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Vzhledem k tomu musí tedy rovnice (3) ve tvaru

$$\frac{p_0}{\varrho} - const = M + \left(\frac{\omega^2}{2} - A\right)x^2 + \left(\frac{\omega^2}{2} - B\right)y^2 - Cz^2.$$

býti rovnicí trojosého ellipsoidu, což jest možným, splňují-li jeho poloosy a, b, c relaci

$$a^2\left(A - \frac{\omega^2}{2}\right) = b^2\left(B - \frac{\omega^2}{2}\right) = c^2 C; \qquad (5)$$

ty dají se pak z krychlového obsahu země vypočítati.

Pro ellipsoid trojosý řešil úlohu *Jacobi* a ukázal, že může býti rovnovážným útvarem zemským tehdy, je-li rotační rychlost země ω vázána relací $\omega^2 < 4\pi\varrho k^2 \,.\, 0{\cdot}09356$. Pro $lim\ \omega = 0$ nabývala by země podoby kruhového válce, jehož osa stojí kolmo na ose rotační. (*Resal*: Traité élémentaire de mecanique céleste, Paris 1884, str. 257; *Kirchhoff*: Mechanik, Leipzig 1876 str. 131.)

Předpokládáme-li pro zjednodušení, že země může býti útvarem rotačním, t. j. že $a = b$, pak dle (4) $A = B$ a rovnice (5) redukuje se na

$$Aa^2 - Cc^2 = \frac{\omega^2 a^2}{2}, \qquad (6)$$

z níž vzhledem k hodnotám A a C plyne, že $a^2 > c^2$, t. j. ellipsoid zemský byl by na pólech sploštělý. Poznatek tento byl příčinou dlouholetého vědeckého sporu, jak později bude uvedeno.

K výpočtu sploštění zaveďme do výrazů (4) pro A a C novou integrační proměnnou rovnici

$$c^2 + \lambda = \frac{a^2 - c^2}{x^2},$$

a k vůli zjednodušení počtu položme $\frac{a^2 - c^2}{c^2} = \sigma^2$; pak totiž

$$A = -2k^2\pi\varrho \frac{1 + \sigma^2}{\sigma^3} \int_\sigma^0 \frac{x^2 dx}{(1 + x^2)^2},$$

$$C = -2k^2\pi\varrho \frac{1 + \sigma^2}{\sigma^3} \int_\sigma^0 \frac{x^2 dx}{1 + x^2},$$

a integrací

$$A = k^2\pi\varrho \frac{1 + \sigma^2}{\sigma^3} \left(arctg\, \sigma - \frac{\sigma}{1 + \sigma^2} \right),$$

$$C = 2k^2\pi\varrho \frac{1 + \sigma^2}{\sigma^3} (\sigma - arctg\, \sigma).$$

Dosazením přejde rovnice (6) v rovnici

$$(3 + \sigma^2)\, arctg\, \sigma - 3\sigma = 2v \,.\, \sigma^3, \quad v = \frac{\omega^2}{4\pi\varrho k^2}, \tag{7}$$

z níž možno stanoviti mez pro rotační rychlost zemskou srovnatelnou s tvarem rotačního ellipsoidu. Z tvaru jejího

$$\frac{3\sigma + 2v\sigma^3}{3 + \sigma^2} - arctg\, \sigma = 0$$

jest patrno, že vyhoví jí vždy dva číselně stejné kořeny jen znamení opačného, a při rozboru stačí se tedy omeziti na kořeny kladné a samozřejmě reálné. Rovnice

$$y = \frac{3\sigma + 2v\sigma^3}{3 + \sigma^2} - arctg\, \sigma \tag{8}$$

v souřadnicích σ, y značí rovnici křivky procházející počátkem soustavy; směrnice její

$$\frac{dy}{d\sigma} = \frac{2\sigma^2 [v\sigma^4 + 2(5v - 1)\sigma^2 + 9v]}{(1 + \sigma^2)(3 + \sigma^2)^2}$$

jest pro $\sigma = 0$ rovna nulle a kladná pro malé hodnoty σ. Křivka dotýká se tedy v počátku osy úseček σ a stoupá až k bodu, jehož úsečka určena jest rovnicí

$$v\sigma^4 + 2(5v - 1)\sigma^2 + 9v = 0; \tag{9}$$

aby kořeny její

$$\sigma^2 = \frac{1-5v}{v} \pm \frac{4}{v}\sqrt{\left(\frac{5}{16} - v\right)^2 - \left(\frac{3}{16}\right)^2}$$

byly reálné, musí býti $v < \frac{1}{8}$, a má-li rovnice (7) míti kořen, musí křivka (8) míti vedle maxima též minimum. Protože pro menší kořen σ jest druhý differenciální kvocient záporný, pro větší kladný, odpovídá první kořen maximu, druhý minimu, t. j. pro tento jsou pořadnice y záporné. Eliminujeme-li tedy z rovnice (8) pomocí (9) veličinu v a vyjádříme podmínku záporné pořadnice, obdržíme nerovninu

$$\mathit{arctg}\,\sigma - \frac{\sigma(7\sigma^2+9)}{(1+\sigma^2)(9+\sigma^2)} > 0,$$

které se patrně vyhoví všemi hodnotami σ většími, než jest kladný kořen rovnice

$$\mathit{arctg}\,\sigma - \frac{\sigma(7\sigma^2+9)}{(1+\sigma^2)(9+\sigma^2)} = 0.$$

Přibližná jeho hodnota jest $\sigma = 2{\cdot}5293$, pro kterou $v = 0{\cdot}1123$. Největší možná angulární rychlost srovnatelná s tvarem rotačního ellipsoidu určena jest tedy rovnicí

$$\frac{\omega^2}{4\pi\varrho k^2} = 0{\cdot}1123.$$

Neboť má-li rovnice (9) kořen větší než $2{\cdot}5293$, bude míti rovnice (7) dva kladné kořeny, jeden větší, druhý menší než toto číslo; a roste-li kořen σ od hodnoty $2{\cdot}5293$ do nekonečna, blíží se v nulle. Obráceně pak platí, že klesá-li v od hodnoty $0{\cdot}1123$ k nulle, blíží se jeden rovnovážný útvar desce, poněvadž sploštění určené číslem σ se stává nekonečným, druhý kouli, kterou se stane patrně pro $v = 0$.

Angulární rychlost země jest veličinou malou, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $T = 86164{\cdot}099$ sec. stř., blíží se tedy rovnovážný tvar země kouli, které odpovídá menší z obou kořenů σ a platí pro něj rozvoj

$$arctg\, \sigma = \sigma - \frac{\sigma^3}{3} + \frac{\sigma^5}{5} - \ldots;$$

rovnice (7) až na veličiny vyšších řádů dá

$$\sigma^2 = \frac{15}{2} v.$$

(Pro kořen druhý užilo by se rozvoje

$$arctg\, \sigma = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{3\sigma^3} - \ldots,$$

a v prvém přiblížení bylo by pak $\sigma = \frac{\pi}{4v}$.)

Protože

$$\sigma^2 = \frac{a^2 - c^2}{c^2},$$

jest

$$a = c\sqrt{1 + \sigma^2}$$

a pro sploštění

$$\varepsilon = \frac{a - c}{a}$$

plyne

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\sigma^2 - \frac{3}{8}\sigma^4 + \ldots$$

Dosazením hodnoty za σ^2 obdržíme vynecháním veličin vyšších řádů Clairautův vzorec

$$\varepsilon = \frac{15}{4} v = \frac{15}{4} \frac{\omega^2}{4\pi \varrho k^2} = \frac{5}{4} \frac{f_0}{g_0}, \tag{10}$$

kde f_0 jest velikost odstředivé síly měřené na rovníku, g_0 jest přítažnost země měřená též na rovníku; při výpočtu gravitační síly považujeme tu zemi na kouli, a jak dalece jsme k tomu oprávněni, bude později ukázáno. Užijeme-li hodnot Fayeových (*Strouhal,* Mechanika I. vyd. str. 32, 346), jest

$$\varepsilon = {}^1/_{231}.$$

Měření stupňová. Tato theoretická hodnota ukázala se nesprávnou, neboť neshodovala se se žádným do té doby provedeným měřením a také proti pozdějším měřením byla příliš velikou. Prvé měření země bylo provedeno *Eratosthenem* (276—195 př. Kr.), dle něhož obvod kulové země by obnášel 250.000 stadií = 39.375 *km*. I ve středověku na rozkaz kalifa *Al Mamuna* měřeny několikráte rozměry zemské a v novověku práce ty podnikány byly soustavněji. Ač při prvních měřeních volena byla za základ plocha kulová, přece výsledky z nich plynoucí hlavně od r. 1617, kdy zavedena byla *Snelliem* triangulace, mohou se považovati za dosti bezpečné. Z měření těch zasluhují zmínky měření v r. 1669—1718 ve Francii vykonaná, ježto bylo při nich poprvé užito všech důležitých vynálezů na poli konstrukce měřických strojů, a ježto měření *Picardovo* v r. 1669—1670 vykonané prospělo *Newtonovi* při vedení důkazu správnosti gravitačních zákonů. Pozdější však měření, jichž výsledky uveřejnil r. 1720 *Cassini*, ukazovala na citronový tvar zemský, kdežto *Newton* theorií gravitační a *Huygens* zákonem odstředivým hájili tvar oranžový. Správnost jejich tvrzení potvrdil kyvadlový objev *Richerův* a spor definitivně rozhodnut novými měřeními vykonanými v *Peru* (1735—41) a *Laponsku* (1736—37) ve prospěch theorie. O pozdějších měřeních, která byla vykonána jednak v šířce, jednak v délce, obsaženy jsou bližší údaje ve spisech: *Gruss*, Z říše hvězd, Praha 1894, str. 409 - 421, *Čubr*, O měření země, Praha 1875, *Novotný*: Dějiny měření stupňového, Praha 1897, *Bigourdan*: Sur diverses mesures d'arcs de méridien etc., Bull. Astr. 1901—03, *Helmert*: Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodaesie (dva svazky 1880, 84), *Harkness*: On the solar parallax and its related constants including the figure and density of the earth. Washington Obs. 1891, Appendix III., kde uvedena i bližší literatura i výsledky jednotlivých měření.

Důležitější z těchto měření jsou následující:

R. 1799 *Mechain* a *Delambre* (Base du systéme métrique décimal . . . svazek 3. Paříž 1810) z oblouku mezi Dunkerque a Barcellonou o amplitudě $9^0 40'$ a z oblouku měřeného v Peru *Bouguerem* a *La Condaminem* o amplitudě $3^0 7'$ stanovili

$$a = 6375738\ m, \quad b = 6356649\ m, \quad \varepsilon = 1 : 334.$$

R. 1830 *George B. Airy* (On the figure of the earth. Phil. Trans. 1826; Figure of the earth., London 1835) ze 14 poledníkových oblouků o amplitudě 59°29′ a ze 4 paralellů o amplitudě 22°41′ našel

$$a = 6377490\ m, \quad b = 6356184\ m, \quad \varepsilon = 1 : 299{\cdot}3249$$

R. 1841 *Bessel* (Astr. Nach. 14; Ueber einen Fehler in der Berechnung der französischen Gradmessung . . . Astr. Nach. 19) z 10 poledníkových oblouků o amplitudě 50° 36′ vypočítal

$$a = 6377397\ m, \quad b = 6356079\ m, \quad \varepsilon = 1 : 299{\cdot}1529.$$

R. 1858 *A. R. Clarke* (Ordonance trigonometrical survey of Great Britain and Ireland. Account . . . London 1858) z 8 meridianových oblouků o celkové amplitudě 68° 8′, nehleděl-li k elliptickému tvaru meridianu, našel

$$a = 6378552\ m, \quad b = 6356697\ m, \quad \varepsilon = 1 : 291{\cdot}8554,$$

a pro elliptický tvar meridianu

$$a = 6378293\ m, \quad b = 6356618\ m, \quad \varepsilon = 1 : 294{\cdot}2607.$$

R. 1859 *F. Schubert* (Essai d'une détermination de la véritable figure de la terre. Mem. petrohradské akademie 1859, T. 1. No. 6) z 8 poledníkových oblouků o celkové amplitudě 72° 37′ vypočítal pro trojosý ellipsoid

$$a = 6378555\ m, \quad b = 6376878\ m, \quad c = 6356719\ m.$$

R. 1860 *A. R. Clarke* (On the figure of the earth. Mem. Roy. Astr. Soc. 29) z pěti poledníkových oblouků o celkové amplitudě 76°35′ našel pro trojosý ellipsoid

$$a = 6378335\ m, \quad b = 6376717\ m, \quad c = 6356171\ m.$$

R. 1863 *Pratt* (A treatise on attractions, La Place functions and the figure of the earth. London 1871). Proceedings of the Royal Society of London 1863; Clarke: On Archdeacon Pratt's „Figure of the earth", Phil. Mag. and Journal of Science 1866) z oblouků angloněmeckého, ruského a indického stanovil

$$a = 6378243\ m, \quad b = 6356639\ m, \quad \varepsilon = 1 : 295{\cdot}2.$$

R. 1866 pozorování provedená v Southamptonu ukázala, že dosud přijaté relace základního typu délky byly poněkud pochybné, a aby chybu odtud vzniklou napravil, považoval *Clarke* (Comparison of the standards of lenght of... London 1866) osy zemského ellipsoidu za dané a nalezl

$$a = 6378294\ m, \quad b = 6376350\ m, \quad c = 6356067\ m;$$

modifikoval-li pak rovnice tak, aby representovaly sferoid, vypočítal z týchž dat

$$a = 6378206\ m, \quad b = 6356583\ m, \quad \varepsilon = 1 : 294{\cdot}9784.$$

R. 1872 *Listing* (Ueber unsere jetzige Kenntniss der Gestalt und Grösse der Erde Göttingen 1872) určil typický sferoid o rozměrech

$$a = 6377365\ m, \quad b = 6355298\ m, \quad \varepsilon = 1 : 289$$

a r. 1878 (Neue geometrische und dynamische Constanten des Erdkörpers. Göttingen 1878) udal ony hodnoty ve velikosti

$$a = 6377377\ m, \quad b = 6355270\ m, \quad \varepsilon = 1 : 288{\cdot}48.$$

R. 1878 *Clarke* (On the figure of the earth. Phil Magazine and Journal of Science 1878) ze 6 oblouků o totální amplitudě $89^0\,32'$ stanovil pro zemský ellipsoid

$$a = 6378379\ m, \quad b = 6377914\ m, \quad c = 6356515\ m,$$

a když r. 1880 rozebrav znovu theorii ellipsoidu, navrátil se k sferoidu, našel z týchž dat (Geodesy, Oxford 1880)

$$a = 6378249\ m, \quad b = 6356515\ m, \quad \varepsilon = 1 : 293{\cdot}4663.$$

Sploštění z geodetických měření stanovená kolísají mezi *Besselovou* hodnotou z r. 1841, $\varepsilon = 1 : 299$ a *Listingovou* hodnotou z r. 1872, $\varepsilon = 1 : 289$. V „Annuaire publié par le Bureau des Longitudes“ uveřejňovány jsou hodnoty: Clarkeho z r. 1880 stanovená z oblouků rusko-švédského, anglo-francouzského, indického, perouského a kapského

$$a = 6378253 \pm 75\ m, \quad b = 6356521 \pm 111\ m,$$
$$\varepsilon = 1 : 293 \pm 1{\cdot}1,$$

a *Faye-ho* z r. 1880 stanovená z oblouku pruského, dánského, hanoverského a parallelu indického

$$a = 6378393 \pm 79\ m, \quad b = 6356549 \pm 109\ m,$$
$$\varepsilon = 1 : 292 \pm 1.$$

Laplace, chtěje uplatniti všechny výsledky měření do jeho dob vykonaných, přiveden byl na řešení problému vyrovnání pozorovacích chyb, které později nahrazeno bylo praktickou methodou nejmenších čtverců. Z vypočítaných chyb seznal, že mathematická plocha zemská není rotačním ellipsoidem, že však mu se dosti přibližuje. Proto také někteří, jako *Bowditch*, *Clarke*, *Paucker* a *Ritter* položili za základ svých výpočtů plochu rotační, jejíž meridianový řez není ellipsou, *Schubert* a *Clarke* trojosý ellipsoid a *Fergola* sploštělý rotační ellipsoid, jehož malá osa jest k ose zemské nakloněna; positivních výsledků však nemáme dosud. Nejčastěji užívá se pro sploštění hodnoty *Besselovy*, ježto dle ní vypočteny jsou různé tabulky pro funkce rozměrů zemských, nebo tak zv. *typického sferoidu Listingova*, jehož sploštění nejvíce se přimyká sploštění z tíže stanovenému, jak později bude ukázáno.

Proč výsledek Clairautův se tak liší od výsledků získaných měřením, bylo různě vykládáno. Námitku proti základnímu předpokladu kapalnosti hmoty zemské lze odvrátiti připomenutím, že země v původním svém stavu nemusela býti kapalnou v našem slova smyslu, ježto i tuhé hmoty velkých rozměrů blíží se hmotám těstovitým a kapalným, takže země v tom stavu rotací sploditi se mohla. *W. Thomson* vysvětluje nesrovnalost tím, že v době sploštování se mohla býti rotace země menší. Náhled ten není dobře odůvodněn; *Laplace* srovnával dobu mezi zatměními a shledal, že od r. 729 př. Kr. se hvězdný den nezměnil ani o $^1/_{100}$ vteřiny, že tedy rotační rychlost zemská jest konstantní. Pozměniti mohly by ji dvě okolnosti, působení slapů a smršťování se země; zdá se však, že obě tyto příčiny se navzájem ruší, ač některá astronomická pozorování by ukazovala, že aspoň v některých časových intervallech, jako r. 1769—1789 a 1840—1861 hvězdný den se prodlužoval, za to v jiných intervallech že se zkracoval. Náhled *Kirchhoffův* (Mechanik, str. 131), že nesrovnalost pochází ze supposice konstantního ϱ při integraci rovnic (2), vyvrací *Koláček* námitkou, že kdyby hustoty ke středu země přibývalo, vyšlo by na povrchu g menší a tím sploštění ještě větší. Tím padá i důvod *Seydlerův* (Základové theoretické fysiky, díl II. str. 102). Tímto směrem tedy theorie výsledek svůj nezlepší, ježto výpočet hodnoty $\varepsilon = {}^1/_{231}$ proveden byl na předpokladech, které nijak splněny nejsou.

Proti měřením geodetickým nelze činiti námitek. Země při nich ovšem považována za sferoid a do konce 18. stol. se myslelo, že určující jeho elementy (velkou poloosu a sploštění) možno určiti několika měřeními, tehdy jen v šířce prováděnými, a různé odchylky při měření se objevivší kladly se na účet měření astronomických. Teprve když proniklo přesvědčení, že úchylky ty mohou míti systematický ráz, snažili se geodetikové redukovati je na míru co nejmenší. Za tím účelem volila se vhodně poloha a i rozměry tak zv. *referenčních* ellipsoidů, to jest takových sferoidů, které se skutečnou zemí mají společnou osu rotační a pro krajiny, pro které jsou určovány, co nejvíce se skutečné zemi blíží. Z těchto referenčních ellipsoidů pro různé krajiny stanovených určí se pak nový ellipsoid, t. j. vypočtou se rozměry nového sferoidu, který všem určeným již referenčním ellipsoidům nejvíce se přimyká, a tak postupně dospíváme ku poznání pravého tvaru a velikosti země. Takový *typický* sferoid určil *Listing* tak, aby se skutečnou zemí měl i stejný krychlový obsah přináší. Patrně tedy každé nové měření opravy stanovených již hodnot a otázka tvaru země ani měřeními geodetickými nemůže býti definitivně rozřešena.

Měření sama prováděna s největší možnou pečlivostí a přihlíženo ke všem možným okolnostem. Tak ku př. *Lambton* (Account of the Operations of the Great Trigonometrical Survey of India. Vol. I. Dehra Dun 1870, str. 16. a 20) při předoindickém měření (1804—47) měl úmysl měření zaříditi tak, aby se z něho pro ten kraj dal zříditi co možno přiléhavý referenční ellipsoid, aby pak mohl býti položen za základ výpočtů konečných geografických souřadnic; jeho nástupce *Everest* (ibidem, vol. II. Dehra Dun 1879, str. 125 - 132) změnil pak určení referenčního ellipsoidu v ten smysl, že ho vyšetřil ve spojení s měřením indofrancouzským. Ač jeho elementy určené r. 1830 souhlasí skoro s Besselovými o něco později určenými, přec vyskytovaly se odchylky, které tehdejší geodetiky vedly k náhledu, že určitá meridianová ellipsa souhlasí dobře jen s některými měřeními, že však pro různá měření nemusí její osa rotační splývati s osou zemskou, že může s ní býti pouze rovnoběžna.

Pravdivost toho ukázala se r. 1889 při spojení oblouku rusko-skandinavského a anglo-francouzského, kde konstatovalo se úhlové stočení obou oblouků asi 0·5″, které r. 1900 také cestou početní bylo potvrzeno. Okolnosti ty vedly také k pochybnostem, že by země byla čistým tvarem rotačním.

K tomu přistoupil nový poznatek, že směr tíže může býti rozdílný od směru normály k meridianovému řezu vedené, že tedy šířka astronomická liší se od šířky geografické. Deviace ta vysvětlena nepravidelným hromaděním hmoty zemské a čítá se jednak kladně nebo záporně. Kladnou jest tehdy, když šířka v daném místě pozorovaná jest větší než šířka z geografické podoby místa vypočtená. Četné deviace vykazují ku př. krajiny Harcu a Kavkazu, kde dosahují hodnot 35″8. Z počátku byly tyto lokální deviace považovány za výjimky, až teprve *Gauss* v „Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen Göttingen und Altona“ poukázal, že náhled ten jest nesprávný. Dle rovnice (3) jest mathematickou plochou povrchu zemského ona plocha, pro niž funkce všech působících sil jest konstantní, t. j. plocha $W = W_0$. Plocha ta stojí všude kolmo na směru tíže a jest pokračováním povrchu mořského. Směr tíže v každém místě dán ale rozdělením hmoty v dotyčném místě a hustotou. Na povrchu zemském pozorujeme sice úplnou nepravidelnost těchto dvou veličin, nejsme však oprávněni dle toho souditi na podobnou strukturu nitra zemského, a plocha povrchu zemského utváří se dle toho, jak hmota zemská jest pod kůrou zemskou rozložena.

Bessel na základě toho definoval mathematickým tvarem zemským onu plochu, kterou by tvořila voda v úzkých kanálech po zemi rozprostřených a s mořem spojených, při čemž voda by byla v relativním klidu vůči zemi a nepodléhala rušivým vlivům slapů a větrů a byla pod neproměnlivým tlakem vzduchu jako nad mořem. Tato orthogonální trajektorie všech tížnic, které následkem nehomogennosti kůry zemské budou obecně čarami prostorovými, bude se patrně lišiti od sferoidu, a proto pro ni později *J. B. Listing* (Neue geometrische und dynamische Constanten des Erdkörpers, Göttingen 1878) zavedl pojem *geoidu.*

Vztah geoidu ke sferoidu zemskému. Za supposice, že země jest rotačním ellipsoidem, sferoidem, budou meridianové řezy ellipsy o poloosách a, b. Úhel φ', který radius vektor R se středu ellipsy k místu pozorovacímu vedený svírá s rovinou rovníku, sluje zlepšenou nebo geocentrickou šířkou dotyčného místa pozorovacího, a úhel φ, který s touž rovinou svírá normála k meridiánové ellipse vedená, sluje šířkou geografickou. Ta byla by identická se šířkou astronomickou, kdyby nebylo lokálních deviací tíže, t. j. kdyby země byla homogenní. Značí-li ε sploštění země a e numerickou excentricitu meridianového řezu, souvisí uvedené pojmy spolu následujícími relacemi:

$$tg\,\varphi' = \frac{b^2}{a^2}\,tg\,\varphi = (1-e^2)\,tg\,\varphi = (1-\varepsilon)^2\,tg\,\varphi$$

$$\left(\frac{R}{a}\right)^2 = \frac{1-e^2}{1-e^2\cos^2\varphi'} = \frac{1-(2e^2-e^4)\sin^2\varphi}{1-e^2\sin^2\varphi}$$

$$= \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'\cos(\varphi-\varphi')} \qquad (11)$$

$$\frac{R}{a} = 1 - \varepsilon\sin^2\varphi + \tfrac{5}{2}\varepsilon^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi\ldots$$

$$= 1 - \varepsilon\sin^2\varphi' - \tfrac{3}{2}\varepsilon^2\sin^2\varphi'\cos^2\varphi'\ldots$$

V theorii zatmění měsíce zavedl *Hansen* ještě tak zvanou excentrickou polovou výšku nebo redukovanou šířku φ_1, jíž místo proměnných R a φ' zavádí jedinou proměnnou φ_1 relacemi:

$$\frac{R}{a}\sin\varphi' = (1-\varepsilon)\sin\varphi_1, \quad \frac{R}{a}\cos\varphi' = \cos\varphi_1.$$

Je-li totiž ABA' zemský meridian, $AB'A'$ kruh aequatoreálním poloměrem zemským kol centra zemského sestrojený, M místo pozorovací určené veličinami R a φ', jest

$$\overline{MC} = \frac{b}{a}\overline{DC} = (1-\varepsilon)\overline{DC},$$

tedy

$$R\sin\varphi' = (1-\varepsilon)\,a\sin\varphi_1,$$

a mimo to

$$\overline{OC} = R\cos\varphi' = a\cos\varphi_1.$$

K výpočtu φ_1 slouží rovnice

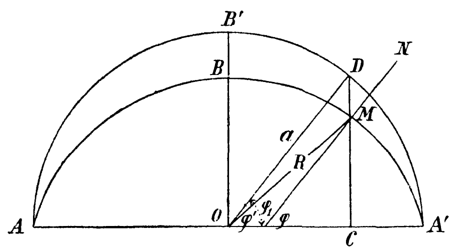
$$tg\, \varphi_1 = \frac{1}{1 - \varepsilon}\, tg\, \varphi' = (1 - \varepsilon)\, tg\, \varphi$$

a v *Oppolzerových* tabulkách hodnoty $\varphi - \varphi_1$ jsou udány.

Není-li však země sferoidem, musíme se snažiti posouditi, jak geoid se od sferoidu liší. Určiti geoid jako celek z měření stupňových není možno, protože měření ta dají se prováděti jen v malých částech povrchu zemského a zvláště velká plocha mořská jest jim nepřístupnou. Musí tedy theorie nalézti cestu, jak bychom mohli souditi na odchylky geoidu od jisté plochy mathematické, na př. od typického sferoidu Listingova, a to po celém povrchu zemském. Jest to možno zkoumáním tíže na povrchu zemském, která patrně dána jest výrazem

$$g = \frac{dW}{dn}, \tag{12}$$

kde n značí směr normály k povrchu zemskému.



Obr. 2.

Práci tu podnikli hlavně *Stokes* (1849 více theoreticky), *Fischer* (1868), *Listing* (1872 a 1878) a *Helmert* (1884) a to na základě přítažnostních anomalií, t. j. rozdílů mezi pozorovanou tíží a vypočítanou dle formule Stokesovy nebo Helmertovy (viz později). *Studnička* nazval čáry spojující místa stejné anomalie *isogamy* a *Sterneck* je v některých částech Rakouska první sestrojil.

Protože geoid jest orthogonální trajektorií všech tížnic, musí jeho plocha na pevnině jíti nad plochou sferoidu (vlivem jednostranného působení země na moře), na moři pak naopak.

Bruns (1878) stanovil tyto odchylky v mezích $\pm$ 500 *m*, a také *Helmert* dospěl (1884) k témuž náhledu; ale již r. 1890 ve „Schwerkraft im Hochgebirge“ dokázal, že úchylky ty zůstávají v mezích $\pm$ 200 *m*, a r. 1899 na základě svých dřívějších zkoumání, zvláště však z výsledků nových evropských stupňových měření v 52° šířky provedených, mohl usouditi, že odchylky ty zůstávají v mezích $\pm$ 100 *m*. Měření *Hergsellova* dávají výsledek, že plocha geoidu nikde se neodchyluje o více než 250 *m* od plochy rotačního ellipsoidu.

Aby čísla ta byla zaručena úplně, jest nutno vykonati pozorování též nad oceánem, což po prvé r. 1901 bylo podniknuto *Heckerem* pomocí srovnávacích pozorování na rtuťovém barometru a thermometru *Mohnově* (Das Hypsometer als Luftdruckmesser und seine Anwendung zur Bestimmung der Schwerkorrection, Christiania 1899). Výsledek byl, že tíže nad Atlantickým oceánem jest normální, odpovídající Helmertově vzorci pro tíži z r. 1901. Také cesta *Nansenova*, při níž konal měření kyvadlová na ledě polárního moře, tento výsledek potvrdila. To konečně potvrzuje též hypothesu *Prattovu* již r. 1855 vyslovenou, hypothesu o isostatickém rozdělení hmoty kůry zemské, že nakupeniny hmotné na některých místech povrchu zemského jsou v hloubkách několika set kilometrů vyrovnány zmenšením hmoty.

Pro měření stupňová plyne z toho důležitý poznatek, že lze je s dostatečnou přesností přenésti na referenční ellipsoid, při čemž odchylky tížnice zůstanou jen v mezích 10″—20″ a nebudou míti systematického charakteru, vztahujícího se na větší okrsky zemské. Pro bližší detaily poukazujeme na práce *Poincaré-ho*, *Helmertovy* a na pojednání *Börschovo* (Die Grundlagen der Bestimmung der Erdgestalt. Verhandlungen des 3. internat. Mathematikercongress in Heidelberg 1904. Leipzig 1905).

Tíži na povrchu zemském zkoumáme kyvadlem a nejčastěji užívá se k tomu kyvadla *Sterneckova*. Je-li totiž t doba kyvu, l délka kyvadla, α poloviční amplituda a g zrychlení tíže, jest dle zákona kyvadlového

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \tfrac{1}{4} \sin^2 \alpha + \ldots\right);$$

zvolíme-li výkyvy malé, můžeme závorku vynechati a z pozorované doby kyvu určiti pro každé místo zemské velikost *g*. Dovedeme-li ho také z theoretických úvah vypočísti, jest tím úloha řešena, neboť pak najdeme i sploštění země.

(Pokračování.)

Věstník literární.

Recense knih.

Brožova fysika pro nižší gymnasia. Podle nové osnovy z r. 1909 přepracoval prof. *Stanislav Petíra.* Nákladem Jednoty českých mathematiků. Cena 2 K 40 h, váz. 2 K 80 h.

Prof. Petíra upravil učebnici Brožovu, která všeobecně za výbornou byla uznávána, dle nových osnov, avšak nepřestal na pouhém přemístění látky, nýbrž snažil se všemožně obsahově i formálně knihu zdokonaliti. Cíle toho dosáhl auktor velmi dobře tím, že často vykládá, kterak lze prakticky applikovati různé zjevy přírodní a že hojně poukazuje také na důležité zjevy každodenního života.

V úvodě pojednává se o prostornosti a neprostupnosti, o dělitelnosti, pórovitosti a skupenství, a přidány jsou odstavce jednající o tíži, váze, hmotě těles a o váze a tlaku vzduchu. Dále probrána jest nauka o teple, magnetismu, elektřině, zvuku a světle. Pro IV. třídy určeny jsou další oddíly fysiky, totiž o rovnováze a pohybu těles, o úkazech nebeských, o kapalinách a o plynech. Již z tohoto rozvržení jest patrno, že se auktor přesně řídil učebnou osnovou. Astronomie jest probrána souborně, jen fase a oběh měsíce ponechány jsou dle znění osnov v optice, kdežto v mechanice a v nauce o teple odkazuje se vždy na příslušné místo astronomie. Souborným probíráním astromie předešlo opakování téže věci ve třídě IV., jež již vyložena byla ve třídě III., neboť ve třídě III. určují osnovy: První orientaci na hvězdém nebi a o pohybu slunce na hvězdném nebi (což má býti rozděleno na celý rok). Mimo to osnova zeměpisu pro gymnasia (což platí i pro reálky) předpisuje pro třídu III.: „Doplňující opakování z hvězdářského zeměpisu se zřetelem na přiléhající části fysikálního učiva téže třídy“. avšak ve III. třídě gymnasií (i reálek) neprobírá se mechanika, nýbrž teprve ve IV. třídě. Dle mínění referentova auktor úplně vyhověl těmto