Emil Weyr
Dvě poučky o kuželosečkách

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 1 (1872), No. 2, 101–104

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122470

proudící paprsky v druhém ústředí v směrech rovnoběžných se šířiti mají. Z bodu A vycházející vlna kulová musí se v druhém ústředí změniti ve vlnu rovinnou, aby bod interferenční ležel ve vzdálenosti nekonečně velké.

Je-li Ax směrem rovinné vlny, O bodem, v němž paprsek Ax s dělící plochou se setká, M libovolným bodem plochy, pak se vlna v okamžiku, v němž do bodu M dospěla, v druhém ústředí až k rovině skrze M kolmo na Ax položené rozšířila. Je-li tato rovina od O vzdálena o délku x, dále $AO = c$, pak jest patrně

$$u = c + nx. \tag{2}$$

Vyvolíme-li souřadnice pravoúhelné a stanovíme-li Ax za osu x, O za bod začátečný, pak dá rovnice (2)

$$y^2 = 2c(n-1)x + (n^2-1)x^2$$

co analytický výraz křivky, kteráž otočena byvši kolem osy x spůsobuje žádanou plochu. Křivka tato jest pro $n > 1$ *hyperbolou*, pro $n < 1$ *ellipsou*, pro $n = -1$ *parabolou*; v každém případě jest A ohniskem, O vrcholem křivky.

Jak se samo rozumí, dají se úvahy tyto podobně na více ústředí rozšířiti.

Dvě poučky o kuželosečkách.

(Podává dr. *E. Weyr.*)

1. Rovnice kuželosečky procházející počátkem souřadnic pravoúhlých, jest, jak známo,

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey = 0; \tag{1}$$

průseky s osou x obdržíme, položíme-li $y = 0$; budeť tu

$$Ax^2 + 2Dx = 0,$$

kterážto rovnice bude míti pro $D = 0$ dva nulle se rovnající a tudíž stejné kořeny; rovnice (1) promění se za touto podmínkou v

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Ey = 0, \tag{2}$$

což nám značí kuželosečku procházející bodem počátečním, jejíž normálou v tomto bodu jest osa y.

Položíme-li počátkem souřadnic libovolnou přímku

$$y = \alpha x, \tag{3}$$

protne kuželosečku (2) v bodu, jehož souřadnice jsou patrně

$$x_1 = -\frac{2E\alpha}{A + 2B\alpha + C\alpha^2}, \qquad (4)$$

$$y_1 = -\frac{2E\alpha^2}{A + 2B\alpha + C\alpha^2};$$

a zavedeme-li do těchto vzorce $-\frac{1}{\alpha}$ místo α, obdržíme

$$x_2 = \frac{2E\alpha}{A\alpha^2 - 2B\alpha + C}, \qquad (5)$$

$$y_2 = -\frac{2E}{A\alpha^2 - 2B\alpha + C}$$

co souřadnice průseku kuželosečky (2) s přímkou

$$y = -\frac{1}{\alpha}x, \qquad (6)$$

stojící kolmo na přímce (3).

Rovnice přímky, spojující body (x_1, y_1), (x_2, y_2) jest pak

$$\eta - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(\xi - x_1),$$

z níž obdržíme pro průsek s osou y, položíme-li $\xi = o$, ihned

$$\eta = \frac{y_2 x_1 - y_1 x_2}{x_1 - x_2},$$

aneb použijeme-li rovnic (3) a (6),

$$\eta = -\frac{1}{\alpha}\frac{\alpha^2 + 1}{\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}};$$

pomocí vzorců (4) a (5) snadno se však sestrojí

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{(A + C)(\alpha^2 + 1)}{2E\alpha},$$

což dosazeno byvši do vzorce předešlého, činí

$$\eta = -\frac{2E}{A + C}, \qquad (7)$$

z čehož patrno, že veličina η jest od α neodvislá. Na základě tomto možná tedy vysloviti poučku tuto:

Otáčí-li se pravý úhel kolem svého na jisté kuželosečce ležícího vrchole, protínají ji ramena jeho v dvé bodů, jichž spojující přímka prochází pevným bodem normály sestrojené ke kuželosečce ve vrcholi tohoto pravého úhlu.

2. Jak jsme shledali, protíná přímka (3) kuželosečku (2)

v bodě, jehož souřadnice jsou ustanoveny vzorci (4); přímka, jenž s osami po druhé straně tytéž úhly uzavírá a rovnicí

$$y = -\alpha x \tag{8}$$

určena jest, protíná kuželosečku (2) v bodě, jehož souřadnice jsou

$$x_2 = -\frac{2E\alpha}{A - 2B\alpha + C\alpha^2}, \tag{9}$$
$$y_2 = -\frac{2E\alpha^2}{A - 2B\alpha + C\alpha^2}.$$

Rovnice přímky, spojující body (4) a (9), bude, jako prvé

$$\eta - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(\xi - x_1),$$

z níž jde pro $\eta = 0$ neb průsek s osou x

$$\xi = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{y_1 - y_2},$$

aneb použijeme-li rovnic (3) a (8),

$$\xi = \frac{2}{\alpha\left(\frac{1}{y_2} - \frac{1}{y_1}\right)};$$

pomocí vzorců (4) a (9) sestrojíme však snadno

$$\frac{1}{y_2} - \frac{1}{y_1} = \frac{2B}{E\alpha},$$

což dosazeno byvši do předešlé rovnice, vede ku vzorci

$$\xi = \frac{E}{B},$$

z čehož patrno, že i průsek této přímky (x_1, y_1), (x_2, y_2) nezávisí na hodnotě α. Za tou příčinou platí o těchto přímkách poučka:

Přímky, procházející pevným bodem kuželosečky a uzavírající stejné úhly s normálou, protínají ji v bodech, jejichž přímka spojující probíhá pevným bodem, nalézajícím se na tečně kuželosečky.

Splynou-li obě k normále stejně nakloněné přímky s normálou samotnou, stane se přímka spojující body (x_1, y_1), (x_2, y_2) tečnou kuželosečky v průsečíku s normálou, z čehož plyne, že *pevný bod, jímž přímka tato prochází, jest polem normály vzhledem ke kuželosečce.*

Obě tuto dokázané poučky dají se i takto vysloviti:

Otáčí-li se proměnlivý pravoúhlý a pevné kuželosečce vepsaný trojúhelník kolem pevného vrchole úhlu pravého, probíhá přepona pevným bodem ležícím na normále, ve vrcholi tomto ke kuželosečce sestrojené.

Mění-li se kuželosečce vepsaný trojúhelník stálého vrchole tak, že úhel v tomto vrcholi vždy jest normálou její rozpůlen, probíhá strana pevnému vrcholi protilehlá vždy polem normály sestrojené ke kuželosečce v tomto pevném vrcholi.

Jednoduché školní aparáty. *)

(Popisuje dr. *Neumann.*)

1. *Hutnoměr* dra. K. Kaliny sestává ze skleněné nádobky průměru as 1·5—2cm. a výšky asi 10—12cm. Nádoba ta je kalibrovaná obr. 51.; obsahuje-li část *mn* 40 gramů vody destilované, rozdělí se v 40 stejných a možno-li, rozdělí se každý stupeň ještě v menší části.

Rozdělení samo nemusí býti na skle, nýbrž na proužku mosazném v podstavci upevněném. Na něm se nalézá též posouvatelný kruh s vlasovým kruhem, by bylo možno vždy přesně udat povrch vody (obr. 51. vv).

Hutnoměr ten se zakládá na myšlence, určiti bezprostředně množství vytlačené tělesem vody, poněvadž zde každý dílec přísluší známé váze vody. Je-li váha tělesa samého známa (a tu lze každou obyčejnou váhou určit), vypočte se pak snadno hledaná hutnost tělesa. Váží-li na př. 15 gramů a vytlačí-li ponořením do hutnoměru vodu o 4.5 stupňů, bude hutnost tělesa toho $15:4{\cdot}5 = 3{\cdot}55$.

Vzlínavost na stěně neškodí, poněvadž vždy vydutý kraj při stoupání též o tolikéž vystoupí. Výhodu má přístroj tu, že není potřebí hutnoměrné (hydrostat.) váhy k určování hutnosti pevných těles; a poněvadž se mohou větší kusy těles k vyše-

*) Článek tento jest pokračováním popisů, jež byly uveřejněny v zprávách jednoty českých matehmatiků a sice v I. pag. 73., v II. pag. 61., v III. pag. 72.