

# Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

---

Josef Hervert

Dioptrika se stanoviska vyšší geometrie [I.]

*Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, Vol. 1 (1872), No. 2, 71–83

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/122474>

## Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1872

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## Dioptrika se stanoviska vyšší geometrie. \*)

(Podává *Josef Hervert.*)

Úzký vztah a veliká analogie, kteréž se vyskytují mezi útvary prostornými methodou nové geometrie zkoumanými a mezi paprsky světelnými v rozličných prostředích se šířícími, činí, že lze theoremy a vymoženosti geometrie polohy přenést i do oboru fysiky, jakž toho jeden příklad z katoptriky již podán v článku: „Upotřebení nové geometrie na fysiku“ (viz I. zpráva jedn. č. math., str. 79.). Zde uvádím jiný takový příklad, z něhož se stane tuším patrné, kterak se dají i zákony lomu pomocí nové geometrie nejen snadněji a názorněji vyvoditi než analytickou methodou, nýbrž i kterak ona nad tuto vyniká úrodností. Obmeziti se chci však toliko na případy obvyklejší, kde rozličná prostředí oddělena jsou jednou neb několika kulovými mezemi a to zase jen soustřednými čili takovými, jichž středy na téže přímce leží.

Budiž v obr. 33. oblouk  $MN$  průřez části kulové plochy opsané ze středu  $c$  a tvořící rozhraní mezi ústředím opticky hustším na straně vnitřní ležícím a ústředím řidším na straně vnější. Budiž dále  $p$  svítící bod, od něhož světelné paprsky vycházejíce na kulovou plochu napadají a do druhého ústředí vnikajíce známým způsobem se lámou, vyjímaje paprsek  $pa$ , kterýž středem  $c$  nezlomen prochází, jelikož v  $a$  kolmo na  $MN$  stojí a protož se hlavním paprskem a směr jeho osou nazývá. Je-li  $pm$  jiný paprsek, který s  $pa$  velmi malý úhel  $\varphi$  svírá, láme se u  $m$  ke kolmici dopadu  $mc$  a vycházejce směrem  $mo$  protíná osu v bodu  $o$ . Chceme-li nalézt tento směr zlomeného paprsku, třeba znáti exponent lomu  $n$  pro přechod světla z jednoho ústředí do druhého. I jest pak dle zákona Snelliova:

---

\*) K sestavení tohoto článku použil jsem co pramenů *a*) v popředí přednášek prof. *A. Macha*, kteréž byl o témž předmětu r. 1869 k svým posluchačům měl; *b*) spisu: „Grundlinien der neueren Geometrie mit einem Anhang über die Anwendung der neueren Geom. auf Optik“ v. *Christoph Paulus*. Stuttgart 1853; *c*) pojednání: „Fundamentalepunkte eines Systems centrirter brechender Kugelflächen“ v. *Ferd. Lippich*. Mittheilungen des naturw. Vereines für Steiermark 1871.

$$\frac{\sin(\varphi + \psi)}{\sin(\psi - \chi)} = n$$

a jsou-li, jak jsme předpokládali, úhly velmi malé, lze též psáti:

$$\frac{\varphi + \psi}{\psi - \chi} = n \quad (1)$$

a za touž podmínkou mohou se i úhly  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$  vyjádřiti týmž obloukem  $am = \sigma$ , jelikož ho co velmi malý ke všem vztahovati lze, takže klademe-li  $pa = \alpha$ ,  $ac = r$ ,  $ao = \alpha'$

$$arc am = \sigma = \alpha\varphi = r\psi = \alpha'\chi \text{ a tudíž: } \varphi = \frac{\sigma}{\alpha}; \psi = \frac{\sigma}{r}; \chi = \frac{\sigma}{\alpha'},$$

což když do rovnice (1) dosadíme, máme:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{r} = n \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{\alpha'} \right)$$

aneb

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{n}{\alpha'} = \frac{n-1}{r} \quad (2)$$

co jiný výraz téhož zákona, z něhož na první pohled patrné, že paprsky z jednoho bodu vycházející (homocentrické) zlomeny byvše zase v jednom bodu se sbíhají, poněvadž veličina  $\sigma$  z výrazu toho docela vymizela.

Chceme-li methodou vyšší geometrie k dopadajícímu paprsku  $pm$  naléztí zlomený paprsek  $mo$ , můžeme to následujícím snadným způsobem. Rovnici (2) lze též takto psáti:

$$\frac{r + \alpha}{\alpha} : \frac{\alpha' - r}{\alpha'} = n \text{ neb } \frac{cp}{ap} : \frac{co}{ao} = n$$

čili

$$(capo) = n \quad (3)$$

a to jest nejjednodušší výraz zákona lomu v mluvě nové geometrie, který se nechá takto slovy vyjádřiti: Jestli že vycházejí paprsky z bodu  $p$  jednoho ústředí a lámajíce se v druhém ústředí sbíhají se v bodu  $o$  a nazýváme-li  $p$  předmětem  $o$  obrazem, můžeme říci: „Předmět a obraz jsou dvě přiřazených bodů vůči  $c$ , a co bodům základním, jichž stálý dvojpoměr se rovná exponentu lomu  $n$ .“

Totéž dá se jednoduchým způsobem též takto geometricky dokázati. Sestrojíme-li v bodu  $m$  tečnu, která seče osu v bodu  $t$  a vedeme-li z  $p$  s  $mt$  ||  $p\bar{d}$ , obdržíme svazek paprskový o vrcholu  $m$ , ježž  $po$  a  $p\bar{d}$  co transversály přetínají a protož tvoří jich průseky s paprsky svazku  $m$  dvě promětných řad bodových, které, poněvadž bod  $p$  oběma řadám společný za vzájemně při-

družený pokládati můžeme, i v poloze perspektivické se nacházejí, tak že bod  $m$  jich persp. středem jesti. Při tom jest bodu  $t$  na ose přiřazen úběžný bod řady  $p\bar{d}$ , jelikož  $p\bar{d} || mt$  a tudíž jest:

$$(d \infty p b) = (c t p o)$$

$$\text{čili } \frac{dp}{\infty p} : \frac{db}{\infty b} = \frac{dp}{\bar{d}b} : \frac{\infty p}{\infty b} = \frac{dp}{\bar{d}b} : 1 = \frac{dp}{\bar{d}b} = \frac{cp}{tp} : \frac{co}{to}$$

Jest-li že, jak jsme předpokládali, oblouk  $\bar{am}$  velmi malý jest, splývá bod  $t$  téměř úplně s bodem  $a$ , pročež můžeme psáti

$$\frac{dp}{\bar{d}b} = \frac{cp}{ap} : \frac{co}{ao}.$$

$$\text{Avšak: } \frac{dp}{\bar{d}b} = \frac{tg(\varphi + \psi)}{tg(\psi - \chi)} = \frac{\sin(\varphi + \psi)}{\sin(\psi - \chi)} = n,$$

poněvadž úhly ty velmi malé jsou, a vychází tudíž i tímto způsobem na jevo, že  $(ca po) = n$ .

Jsou-li tudíž dány 3 body:  $c, a, p$  a dvojpoměr  $n$ , jest i bod  $o$  zcela určité stanoven a musí tudíž paprsky, které z bodu  $p$  vycházejíce velmi malé úhly s osou svírají zlomeny byvše v témž bodu  $o$  se stýkati a poněvadž  $ca$  jest poloměr oblouku  $MN$ , lze zákon lomu též takto vysloviti: „*Svítilící bod a jeho obraz rozdělují anharmonicky poloměr kulové plochy, kteráž tvoří rozhraní dvou rozličně hutných ústředí a síce jest anharmonická funkce stanovena exponentem lomu  $n$ .*“

Známe-li tento základní vztah mezi předmětem a obrazem, můžeme zcela snadno z toho, co geometrie polohy o promítavých útvech učí, a) poznati, kterak se s každou zvláštní polohou předmětu mění poloha obrazu a naopak; b) k danému bodu co předmětu sestrojiti pomocí poloměru kulové plochy a exponentu lomu příslušný bod co obraz a k dopadajícímu paprsku světelnému zlomený paprsek a naopak; c) můžeme na témž základě zcela snadno vyzkoumati pravidla, jakými se paprsky světelné řídí, když ústředí rozličné hutnosti zvláštní polohu mají vzhledem k hraničné ploše kulové a z toho právě poznati velikou výhodu a přednost této metody.

Co se především zvláštních poloh předmětu a obrazu týká, můžeme si chtějíce poznati tuto vzájemnou souvislost mysliti, že bod  $p$  vyšed z nekonečna na ose ku předu se pohybuje, až zase na druhé straně do nesmírnosti dospěje. I bude mu v každé

zvláštní poloze:  $p, p', p'' \dots$  příslušetí zcela určitý bod  $o, o', o'' \dots$  co obraz, daný dvojpoměrem

$$(ca\ p\ o) = (ca\ p'\ o') = (ca\ p''\ o'') = \dots = n.$$

Tím způsobem obdržíme dvě promětných řad v téže přímce čili tak zvané souosé, soumísné řady a možno tudíž osu pojímati za řadu dvojatou, poněvadž kterýkoli bod její buď jedné, buď druhé řadě přiřísti lze, tak sice, že považujeme-li jistý bod  $k$  za předmět, přiřazen jest mu zcela určitý bod  $k'$  co obraz; pojímáme-li však  $k$  co obraz, načež jej  $l'$  značíme, přísluší mu jiný bod  $l$  co předmět, který od bodu  $k'$  zcela rozdílnou polohu má.

Toto dvojitě pojímání bodův osy stane se ještě patrnějším, jestliže si vyznačíme charakteristické body obou řad t. j. body centrálné a dvojné. Nalézají-li se totiž bod  $p$  v nesmírnosti, přiřazen jest mu co obraz určitý bod  $f'$ , kterýž dán jest dvojpoměrem

$$(ca\ \infty\ f') = \frac{c\ \infty}{a\ \infty} : \frac{cf'}{af'} = 1 : \frac{cf'}{af'} = n \text{ aneb } \frac{cf'}{af'} = \frac{1}{n},$$

kterýž tudíž pro tento případ přechází v poměr jednoduchý. Stává-li se  $o$  bodem úběžným, přidružen mu jest určitý bod  $f$  co předmět stanovený dvojpoměrem

$$(ca\ f\ \infty) = \frac{cf}{af} : \frac{c\ \infty}{a\ \infty} = \frac{cf}{af} : 1 = n \text{ čili } \frac{cf}{af} = n$$

opět poměr jednoduchý. Body  $f, f'$ , kteréžto přináležejí úběžným bodům obou řad, zovou se ve vyšší geometrii body centrálné, úběžníky, také body protější a hledíme-li k jich optickému významu, vidíme, že jsou totožny s ohnisky kulové plochy. Důležitost jejich pro vzájemný vztah obou řad bodových ihned vysvitne, jakmile blíže popatříme k základním bodům  $a, c$  a jich významu. Jest-liže dospěje  $p$  do bodu  $a$ , je příslušný bod co obraz vytknut dvojpoměrem  $(ca\ a\ o) = n$  čili

$$\frac{ca}{aa} = n \frac{co}{ao} \text{ a poněvadž } aa = o \text{ je } n \frac{co}{ao} = \infty \text{ tudíž } ao = o$$

t. j. v bodu  $a$  splývají dva přiřazené body v jeden.

Bod  $a$  jest sám sobě přiřazen, jest tudíž bod dvojný čili samodružný. Je-li tudíž svítící bod v  $a$ , nelámou se paprsky od něho vycházející, jelikož náleží bod  $a$  oběma ústředím.

Podobně jest i bod  $c$  element samodružný. Doběhne-li totiž bod  $p$  do  $c$ , je poloha obrazu jeho určena dvojpoměrem:

$$(ca\ co) = n \text{ čili } \frac{cc}{ac} = n \frac{co}{ao}$$

a jelikož  $cc = o$  je i  $co = o$  t. j. v  $c$  splývají opět dva různé body čili bod  $c$  přísluší sám sobě, což vyjádřeno jakožto fyzikální vlastnost bodu  $c$  zní takto: Jest-liže vycházejí ze středu  $c$  co svítícího bodu paprsky světelné, nelámou se, poněvadž stojí kolmo na kulové ploše, nýbrž sbíhají se zase ve středu  $c$ .

Jsou-li však  $a, c$  dvojně elementy obou řad, víme z geometrie polohy, že úběžníky souměrnou polohu mají vůči těmto bodům samodružným, tak že střed vzdálenosti bodů dvojných rozpoluje i vzdálenost bodů centralných a můžeme tuto polohu jejich ještě blíže stanovit pomocí anharmonické funkce  $n$  vzájemnost dvou přiřazených bodů určující. Poněvadž totiž  $n$  v našem případě je veličina pozitivná, má každé dvě sdružených bodů stejnou polohu vzhledem k základním bodům  $a, c$ , tak sice, že leží současně vždy oba buď mimo  $ac$  (vnější body) aneb mezi  $a c$  (vnitřní body). Tomu-li tak, jsou obě řady bodové souběžné a v takových leží dvojně body  $a, c$  vždy mezi centralními  $f, f'$ , tak že  $cf = af'$  aneb píšeme-li:

$$af = \varphi; af' = \varphi' \text{ jest: } \varphi' - r = \varphi.$$

• Totéž vyvoditi lze i z poměrů určujících polohu ohnisek' neboť zavedeme-li  $\varphi$  a  $\varphi'$  do výrazů:

$$\frac{cf'}{af'} = \frac{1}{n} \text{ a } \frac{cf}{af} = n,$$

obdržíme z prvního:

$$\varphi' = \frac{nr}{n-1}$$

a z druhého

$$\varphi = \frac{r}{n-1},$$

z čehož dále vyplývá, že  $\varphi' = n\varphi$  a zároveň  $\varphi' - r = \varphi$ , kteroužto relaci bychom ovšem taktéž z rovnice (2) nalézti mohli, kdybychom položili jednou  $\alpha = \infty$  po druhé  $\alpha' = \infty$ .

Pomocí úběžníků čili ohnisek  $f, f'$  můžeme vzájemnou polohu dvou přiřazených bodů co předmětu a obrazu rovněž tak jednoduše stanovit, jako pomocí dvojných bodů  $a, c$ , poněvadž víme, že součin vzdáleností dvou přiřazených bodů promětných

řad od dotýčných bodův centrálných jest hodnota stálá. Jaká tato hodnota jest, můžeme zcela snadno vyzkoumati, jest-liže do dvojpoměru:

$$(ca\ po) = \frac{cp}{ap} : \frac{co}{ao}$$

zavedeme vzdálenosti přiřazených bodův od ohnisek  $f$  a  $f'$  kladouce totiž:

$$cp = r + \varphi + fp; ap = \varphi + fp; co = \varphi' - r + f'o;$$

$$ao = \varphi' + f'o \text{ a } n = \frac{\varphi'}{\varphi}.$$

Toto učiníce nalezneme, že:

$$\overline{fp} \cdot \overline{f'o} = \varphi\varphi' \text{ t. j.} \quad (4)$$

„Součin vzdáleností dvou přidružených bodů (co obrazu a předmětu) od dotýčných ohnisek rovná se součinu vzdáleností ohnisek samých“ — jiný to výraz zákona lomu. Výraz ten můžeme ještě jinak přetvořiti, počítáme-li vzdálenosti obrazu a předmětu od bodu  $a$  kladouce  $fp = ap - af = \alpha - \varphi$ ; a  $f'o = ao - af' = \alpha' - \varphi'$ . Tu obdržíme:  $(\alpha - \varphi)(\alpha' - \varphi') = \varphi\varphi'$ , z čehož jde že

$$\frac{\varphi}{\alpha} + \frac{\varphi'}{\alpha'} = 1 \quad (5)$$

jakožto, relace mezi vzdálenostmi  $\alpha, \alpha', \varphi, \varphi'$ .

Chceme-li stopovati konečně celý průběh předmětu a obrazu v oněch souběžných a soumístných řadách, jest to dle uvedených vztahů věcí velmi snadnou. Je-li bod  $p$  v nesmírnosti, je přiřazený obraz v  $f'$ ; pohybuje-li se  $p$  z nekonečna a blíží-li se směrem šípu (obr. 34.) od levé strany ku pravé bodu  $f$ , vzdaluje se bod  $o$  týmž směrem od  $f'$ ; neboť ubývá-li délky  $\overline{fp}$ , musí  $\overline{f'o}$  růsti, poněvadž součin obou délek stálý jest, takže dospěje  $o$  do  $\infty$  touž dobou, když  $p$  do bodu  $f$  doběhl. Postupuje-li předmět  $p$  přes bod  $f$  dále k bodu  $a$ , přeskočí obraz  $o$  takřka na levou stranu a blíží se z nekonečna stále týmž směrem od levé k pravé k bodu  $a$ , tak že leží oba přiřazené body po levé straně délky  $\overline{ca}$  a an bod  $p$  proběhne dráhu  $\overline{fa}$ , dorazí bod  $o$  z  $\infty$  do bodu  $a$ , v kterém současně s bodem  $p$  v dvojbod splývá. Až potud pohybovaly se oba sdružené body mimo délku  $\overline{ca}$ .

Při dalším pohybu bodu  $p$  na dráze  $\overline{ac}$ , vyskytují se oba body:  $p$  i  $o$  co body vnitřní mezi  $\overline{ac}$  blížíce se současně bodu  $c$ , avšak s rychlostí nestejnou, jelikož jeví se opět vzdálenosti

jich od bodů  $f$  a  $f'$  co součinitelé o stálém součinu, tak že teprve v bodu  $c$  v element samodružný se sbíhají. Jde-li konečně  $p$  dále přes bod  $c$ , vzdaluje se i  $o$  od bodu  $c$  týmž směrem, tak že leží oba co vnější body po pravé straně základních bodů  $c$ ,  $a$ .

Při tom jest zase rychlost pohybu jejich nestejná, tak že bod  $o$  proběhne touž dobou dráhu  $cf'$ , když bod  $p$  z  $c$  do  $\infty$  postoupí a padá do  $f'$ , když  $p$  stává se bodem úběžným.

Tento vzájemný pohyb obou sdružených bodů  $p$  a  $o$  co předmětu a obrazu lze si též pro určitý exponent lomu velmi dobře mechanicky znázorniti pomocí drátěného svazku, který se nejvýhodněji sestojí, když se ze společného vrcholu  $m$  (obr. 35.) vede jeden drát bodem  $a$  druhý bodem  $c$ , třetí rovnoběžně s osou a čtvrtý konečně ohniskem  $f'$ . Jest-liže si dále zarazíme v bodech  $a$ ,  $c$  dva hřeby, aby knim při otáčení svazku dráty  $\overline{ma}$  a  $\overline{mc}$  stále přiléhaly a jest-liže si body  $p$ ,  $o$  na koncích drátů zvláštním způsobem vyznačíme, můžeme si onu drátěnou hvězdu ve směru šípů a pak obrácenou ve směru opácném kolem bodu  $m$  otáčejíce vzájemný pohyb předmětu a obrazu velmi jasné znázorniti.

Obzvláštní výhodu poskytuje methoda vyšší geometrie, jedná-li se o to, aby se k danému bodu aneb paprsku sestrojil přidružený element, což tuto několika způsoby provéstí chci. Jsou-li dány základní body  $a$ ,  $c$  a exponent lomu  $n$ , lze ku každému bodu co předmětu sestrojiti obraz jeho a naopak pomocí pravidla platícího pro konstrukci čtvrtého přiřazeného bodu ku 3 daným bodům, znám-li jest dvojpoměr jejich, a při tom zároveň přesvědčiti se o dvojitém přiřazení bodů sdružených k určitému danému bodu, čili o tom, že kterémukoli bodu  $k$ , vyjímaje body  $a$ ,  $c$ , přísluší vždy dva od sebe rozdílné body, jest-li že  $k$  jednou za předmět, po druhé za obraz pokládáme a sdružený k němu element hledáme.

Buďtež v obr. 36. dány body  $a$ ,  $c$  a exponent lomu  $n$  ku př.  $n = \frac{3}{2}$  pro přechod světla ze vzduchu do skla. V tom případě je  $\varphi = 2r$   $\varphi' = 3r$  a je-li dán jakýsi bod  $p$  co předmět ku př. mezi  $af$ , víme, že příslušný obraz v tom zvláštním příkladě leží taktéž po levé straně délky  $\overline{ca}$ . Místo jeho nalezneme snadno tímto způsobem: Proložme bodem  $p$  libovolnou přímku  $P$  a vy-



tkněme na ní dle libovolného měřítka týmž směrem od bodu  $p$ , tedy buď nahoru neb dolů dvojpoměr  $n$ , tak že  $dp$  se rovná čítaleli  $= 3$ , a  $bp$  jmenovateli  $= 2$  exponentu  $n = \frac{3}{2}$ . Spojíme-li  $b$  s bodem  $a$  a bod  $d$  s bodem  $c$ , budou se přímky:  $\overline{ba}, \overline{dc}$  protínati v určitém bodu  $t$ , kterýžto pojímáme za vrchol svazku, jehož paprsek  $P'$  rovnoběžný s přímkou  $P$  protíná osu v hledaném bodu  $o$ . Že tomu vskutku tak, dokázati se dá následujícím jednoduchým způsobem: Spojíme-li bod  $t$  s bodem  $p$ , máme svazek paprskový o vrcholi  $t$ , kterýžto přetínají transversály  $P, O$ , mající v bodu  $p$  oběma řadám společným dvě na vzájem sdružených bodů. Jsou tudíž  $P$  a  $O$  dvě promítavé řady bodové v poloze perspektivické a bod  $t$  jich persp. střed. Za touž příčinou jsou body ležící na témž paprsku svazku  $t$  sobě přidruženy a jich dvojpoměry sobě rovny, takže:

$$(capo) = (dbp\infty),$$

jelikož bod  $o$  jest úběžníkem řady  $P$ , ana přímka  $P' \parallel P$ .

Tudíž jest:

$$(capo) = \frac{dp}{bp} : \frac{d\infty}{b\infty} = \frac{dp}{bp} : 1 = \frac{dp}{bp} = \frac{3}{2} = n$$

t. j. bod  $o$  jest obraz přiřazený bodu  $p$  co předmětu.

Jest-liže však bod  $p$  pojímáme co obraz, načež jej  $o'$  značíme, shledáme, že bod  $p'$  jemu co předmět přiřazený od bodu  $o$  docela rozdílný jest. Chceme-li nalézt tento bod  $p'$ , proložme opět bodem  $o'$  libovolnou přímku a naměřme na ní v témž směru délky  $d'p = 3$ ;  $b'p = 2$ ; spojme však nyní bod  $b'$  s  $c$  a  $d'$  s  $a$  a vedme průsekem  $t'$  přímek spojných  $\overline{b'c}, \overline{d'a}$  přímku  $P'' \parallel P$ . Tato nám protne osu v hledaném bodu  $p'$ , kterýž jest co předmět přiřazen bodu  $o'$  co obrazu. Neboť máme tu opět dvě persp. řady o středu  $t'$ , jichžto dvojpoměry sobě rovny jsou, takže:

$$(cap'o') = (b'd'\infty o')$$

jelikož bod  $p'$  jest úběžníkem řady  $P$  a  $o'$  bod oběma řadám společný. Jest tudíž:

$$cap'o') = \frac{b'\infty}{d'o'} : \frac{b'o'}{d'o'} = 1 : \frac{b'o'}{d'o'} = \frac{d'o'}{b'o'} = \frac{3}{2} = n$$

čili bod  $p'$  přiřazen bodu  $o'$  co obrazu.

Tímto uvedeným způsobem můžeme pro každý exponent  $n$  ku kterémukoli bodu sestrojiti přidružený element. Zá-

roveň jest z té konstrukce patrné, že ohnisko  $f$  jest centrálným bodem řady obrazové a ohnisko  $f'$  úběžníkem řady předmětové. Neboť považujeme-li bod  $f$  co předmět a hledáme-li příslušný k němu obraz, stane se to opět tím způsobem, že proložíme bodem  $f$  libovolnou přímkou  $P$  a na ní v témž směru délky  $\overline{df}$ , a  $\overline{bf}$  určíme dvojpoměrem  $n$ , tak že  $\frac{df}{bf} = n$ . Spojíme-li pak bod  $d$  s bodem  $a$ ,  $b$  s  $c$ , budou v tomto případě přímky  $\overline{ba}$ ,  $\overline{dc}$  rovnoběžky, jelikož:

$$\Delta fab \sim \Delta fcd. \text{ Neboť:}$$

$$\frac{cf}{af} = \frac{ca + af}{af} = \frac{\varphi'}{\varphi} = n$$

a tudíž:

$$\frac{cf}{af} = \frac{df}{bf}.$$

Tím způsobem padne persp. střed  $t$  do  $\infty$  a přímka kterou tímto bodem proložíme  $\parallel$  s  $P$ , protíná osu  $O$  taktéž v  $\infty$  t. j. bodu  $f$  přísluší co obraz úběžný bod osy  $O$  co řady obrazové. Podobně můžeme dovoditi, že bodu  $f'$  co obrazu přísluší bod úběžný osy  $O$  co řady předmětové.

Týmž způsobem i ku každému danému paprsku co dopadajícímu aneb zlomenému příslušný paprsek sestrojiti lze. Třeba pouze prodloužiti daný paprsek, až protne osu v bodu  $p$  resp.  $o'$  a kulovou plochu v bodu  $m$  (bodu dopadu). Známe pak na ose 3 body a dán-li exponent  $n$ , sestrojíme řečenou methodou přidružený bod  $o$  resp.  $p'$  a pak třeba pouze spojití bod  $m$  s bodem sestrojeným, abychom obdrželi hledaný paprsek  $\overline{mo}$  resp.  $\overline{mp'}$ .

Chci však tuto uvéstí ještě jiný způsob, jakým téhož ještě snadněji dosíci lze; jest-liže se pomocná přímka určitým směrem vede. Budiž (v obr. 37.) dán  $\overline{mp}$  paprsek dopadající na kulovou plochu, k němuž nám hledati jest zlomený paprsek  $\overline{mo}$ . Za tou příčinou proložíme  $m$  co vrcholem svazku paprsky  $\overline{ma}$  a  $\overline{mc}$ , a vedme bodem  $p$ , v němž paprsek dopadající osu protíná, přímkou  $P \parallel \overline{mc}$ , až protne přímkou  $\overline{ma}$  v bodu  $a'$ . Od bodu tohoto naznačme týmž směrem buď nahoru neb dolů dle libovolného měřítka exponent lomu  $n$ . Je-li ku př. pro přechod světla ze vzduchu do vody  $n = \frac{4}{3}$ , učiníme  $\overline{a'd} = 4$ ,  $\overline{a'b} = 3$ . Pak spojíme bod  $b$  s bodem  $p$  a sestrojíme bodem  $d$  rovnoběžku s přím-

kou  $\overline{bp}$ , až protne  $P$  v bodu  $d'$ . Spojíme-li  $m$  s  $d'$ , jest  $\overline{md'}$  hledaný paprsek přiřazený co zlomený paprsek dopadajícímu paprsku  $\overline{mp}$ , což se snadno takto dá dokázati:

Přímka  $P$  a osa  $O$  tvoří dvě promětné řady v poloze perspektivické. Bod  $m$  jest jich persp. střed a protož body na témž paprsku svazku  $m$  ležící na vzájem přidruženy jsou. V bodu  $p$  oběma řadám společném nalézají se dvě přiřazených bodů a bod  $c$  jest co protější bod přiřazený úběžnému bodu řady  $P$ , jelikož  $mc \parallel P$ . Z té příčiny jsou dvojpoměry obou řad sobě rovny t. j.

$$(capo) = (\infty a'pd') =$$

$$\frac{\infty p}{a'p} : \frac{\infty d'}{a'd'} = \frac{a'd'}{a'p} : \frac{\infty d'}{\infty p} = \frac{a'd'}{a'p} : 1 = \frac{a'd'}{a'p}$$

Avšak jelikož  $\overline{dd'} \parallel \overline{bp}$ , je  $\angle a'pb \sim \angle a'd'd$  a protož:

$$\frac{a'd'}{a'p} = \frac{a'd}{a'b} = \frac{1}{3} = n \text{ a tudíž } (capo) = n.$$

Jest-liže však paprsek  $\overline{mp}$  považujeme za zlomený, načež jej  $\overline{mo'}$  značíme hledající příslušný mu dopadající paprsek, můžeme ho ihned nalézt, spojíme-li bod  $p$  nyní s bodem  $d$  a proložíme-li bodem  $b$  rovnoběžku s  $\overline{dp}$  až protne přímku  $P$  v bodě  $d''$ . Spojíme-li tento bod s  $m$ , jest  $\overline{md''}$  hledaný paprsek, který protíná osu v bodu  $p'$ . Neboť máme opět:

$$(cap'o') = (\infty a'd''o') = \frac{a'o'}{a'd''}.$$

Avšak jelikož  $\angle a'bd'' \sim \angle a'do'$ , je:

$$\frac{a'o'}{a'd''} = \frac{a'd}{a'b} = \frac{1}{3} = n$$

a tudíž  $(cap'o') = n$  t. j.  $\overline{mp'}$  jest hledaný dopadající paprsek.

Touto konstrukcí možná se též přesvědčiti, že paprsku, který dopadaje na kulovou plochu prochází bodem  $f$  přidružen jest paprsek s osou rovnoběžný. Neboť značíme-li obraz přiřazený bodu  $f$  co předmětu písmenem  $\omega$  jest:

$$(caf\omega) = n.$$

a poněvadž v tomto případě  $\frac{cf}{af} = n$  musí  $\frac{c\omega}{a\omega} = +1$  t. j. bod  $\omega$  leží v nemírnosti; avšak vedeme-li z bodu  $m$  přímku k úběžnému bodu osy, převrhne se tato na rovnoběžku. Podobně do-

padá paprsek rovnoběžně s osou na kulovou plochu, jde-li zlo-  
mený paprsek ohniskem  $f'$ .

Tyto konstrukce přiřazených bodů a paprsků valně se  
zjednoduší, jsou-li známy již buď dva přiřazené body aneb  
ohniska, jak několika příklady blíže objasním. Budťež v obr. 38.  
dány dva sdružené body  $bb'$  co předmět a obraz sestrojené na  
př. pro exponent lomu  $n = 2$  (pro přechod světla ze vzduchu  
do síry) a měž se k bodu  $p$  co předmětu sestrojiti příslušný  
obraz  $o$  aneb jinými slovy řečeno: jelikož dány jsou body  $b, b'$   
vyhovující podmínce  $(cabb') = n = 2$ , má se k bodu  $p$  sestrojiti  
bod  $o$  tak, aby  $(cabb') = (capo)$ . To stane se takto. Považujme  
libovolný bod  $t$  mimo osu za vrchol svazku paprskového a vedme  
z něho paprsky body  $c, a, b, b'$ . Volme dále na paprsku  $ta$   
jakýsi bod  $t$  co vrchol nového svazku a proložme jím  $a$  bodem  
 $p$  paprsek  $tp$ , který nám přetíná přímku  $tb$  v bodu  $k$ . Spojme  
dále bod  $k$  s bodem  $c$  a prodlužme obdržanou přímku tu  $P$ , až  
nám protne paprsek  $tb'$  v bodu  $l$ . Proložíme-li konečně vrcholem  
 $t'$  a bodem  $l$  paprsek  $t'l$ , seče tento osu v hledaném bodu  $o$ .  
Důvod toho jest následující: Osa  $O$  a přímka  $P$  jsou dvě pro-  
mětné řady v poloze persp. vzhledem k persp. středu  $t$  a spo-  
lečnému vzájemnému bodu  $c$ . Protož jsou body na týchž pa-  
prscích svazku  $t$  na vzájem sdruženy a jich dvojpoměry sobě  
rovný, totiž:

$$(cabb') = (cgkl).$$

Avšak táž přímka  $P$  a osa  $O$  jsou taktéž dvě promítavé řady  
v poloze persp. o společně družném elementu  $c$  vzhledem k bodu  
 $t'$  co jich persp. středu a tudíž jsou i body na paprscích svazku  
 $t'$  ležící na vzájem sdruženy a jich dvojpoměry stejny, takže:

$$(cgkl) = (capo),$$

a z těchto dvou srovnalostí vyplývá snadno třetí:

$$(cabb') = (capo) = n,$$

kteráž praví, že bod  $o$  přísluší bodu  $p$  co obraz.

Máme-li však bod  $p$  za obraz označující ho co takový  $o'$ ,  
nalezneme ihned bod příslušný mu co předmět, jest-liže pro-  
dloužíme paprsek  $t'o'$ , až protkne  $tb'$  v bodu  $l'$ . Odtud vedme  
přímku  $P'$  bodem  $c$ , kterážto nám seče  $ta$  v bodu  $g'$  a  $tb$  v bodu  
 $k'$  a jest-liže konečně body  $k'$  a  $t'$  proložíme paprsek, určuje  
nám tento na ose hledaný bod  $p'$ .

Neboť jest opět přímka  $P'$  s osou  $O$  v poloze-persp. vzhledem k společnému členu  $c$  a sice mají obě jednu persp. střed  $t$  a protož jest:

$$(cabb') = (cg'k'l')$$

a po druhé bod  $t'$ , pročež  $(cg'k'l') = (cap'o')$

a z obou vysvítá konečně, že  $(cabb') = (cap'o') = n$ .

Konstrukce ta nepozbývá platnosti a spolehlivosti, jest-liže vrchol  $t$  stává se bodem úběžným, v kterémžto případě mají všechny paprsky též směr, takže svazek paprskový přechází v tak zvanou osnovu rovnou, an při tom dvojpoměr neproměněn zůstává. Jsou-li na př. paprsky ty kolmy k ose  $O$ , udává obr. 39., kterak se k dopadajícímu paprsku  $M$  sestrojí zlomený paprsek  $M'$  (pro též exponent lomu  $n = 2$ ). Třeba pouze prodloužiti  $M$ , až protíná  $A$  v bodu  $t'$ , co vrcholí nového svazku a  $B$  v bodu  $k$ , z něhož vedeme přímku bodem  $c$ , až dostihne  $B'$  v  $l$ . Jest pak  $t'l$  směr zlomeného paprsku  $M'$ . Důvod toho je též, jako v předešlé konstrukci. Pojímáme-li však  $M$  co zlomený paprsek  $N'$ , najdeme přiřazený k němu dopadající paprsek, když z průsečíku  $t'$  přímek  $N'B'$  vedeme bodem  $c$  přímku, až prosekne  $B$  v bodu  $k'$ . Přímka spojuje  $t'k'$  určuje směr hledaného paprsku  $N$ .

Sestrojování přiřazených elementů může se dít též pomocí buď bodu  $f'$ , buď bodu  $f$ , buď konečně obou.

Jsou-li v obr. 40. dány body  $c, a, f'$  na př. pro exponent lomu  $n = \frac{3}{4}$  u diamantu, kdežto  $\varphi = \frac{3}{5} r$ , víme, že bodu  $f'$  přiřazen jest úběžný bod co předmět, takže:

$$(ca \infty f') = n = \frac{3}{4}$$

a má-li se k bodu  $p$  co předmětu konstruovati příslušný obraz  $o$ , musí míti takovou polohu, že

$$(ca \infty f') = (capo) = n.$$

Následující operace vede k tomu cíli. Bod  $m$  považuje se za vrchol svazku a vedou se z něho paprsky bodu  $c, a, \infty, f'$ . Na paprsku  $ma$  zvolí se bod  $t$  za vrchol nového svazku, načež se průsečíkem  $k$  přímek  $tp$  a  $m\infty$  a bodem  $c$  proloží přímka  $P$ , kteráž stihne  $m f'$  v bodu  $l$  a spojí-li se tento s bodem  $t$ , stanoví přímka spojuje na ose hledaný bod  $o$ . Neboť vztahujeme li přímku  $P$  protínající osu  $O$  v soudružném bodu  $c$  k jich perspektivickému středu  $m$ , vidíme, že:

$$(ca \infty f') = (cgkl).$$

Jest-liže však bod  $t$  za jich persp. střed máme, musí:

$$(cgl) = (capo),$$

z kterýchžto dvou výrazů vyplývá konečně:

$$(ca \infty f') = (capo) = n.$$

Kdybychom  $p$  za obraz beroucí příslušný bod  $p'$  hledali, potřebovali bychom toliko průsečík  $l'$  přímek  $mf'$ ,  $t'o'$  spojití s bodem  $c$ , čímž by na  $m\infty$  vyskytl se bod  $k'$  a paprsek procházející body  $t, k'$  vyznačil by na ose hledaný bod  $p'$  určený dvojpoměry  $(ca \infty f') = (cg'k'l')$  vzhledem k středu  $m$

$$a \quad (cg'k'l') = (cap'o') \quad n \quad n \quad n \quad l,$$

z nichž plyne  $(cap'o') = n$ .

Tento způsob sestrojování ovšem platnosti nepozbývá, nybrž ještě snadnějším se stává, posmekne-li se vrchol  $m$  do nesmírnosti, takže daný jím svazek tvoří osnovu rovnoběžných paprsků. Obr. 41. ukazuje, jak se v tom případě sestrojuje k danému paprsku  $M$  co dopadajícímu zlomený paprsek  $M'$ , je-li na př. exponent lomu  $n = 9/4$ . Třeba tu pouze bodem  $c$  vésti rovnoběžku s  $M$ , jelikož bod  $k$ , v němž  $M$  přímku  $m\infty$  seče, v nesmírnosti leží a průsek její  $l$  s  $F'$  spojití s  $t$ . Jest pak  $tl$  směr zlomeného paprsku  $M'$  z řečeného již důvodu. Značí-li však  $M$  zlomený paprsek  $N'$ , najdeme k němu přiřazený dopadající paprsek, jest-liže průsek  $l'$  přímek  $N'F'$  spojíme s bodem  $c$  a vedeme z  $t$  paprsek  $tp' \parallel l'c$ .  $tp'$  určuje nám směr hledaného paprsku  $N$ .

Podobně provádějí se konstrukce přiřazených bodů a paprsků, jest-liže známy jsou body  $c, a$ , a ohnisko  $f$ , jakž ukazují obr. 42. a obr. 43., kteréž sestrojeny jsou pro exponent lomu  $n = 2.926$  dromanu olovnatého, k nimž netřeba dalšího výkladu.

## O úkazech povrchového napnutí tekutin.

(Podává dr. M. Neumann.)

V novější době se mnoho pěstovaly úkazy vyskytující se u tekutin, jež se dají vysvětliti toliko silami molekulárními, a sice nejen u jedné a téže kapaliny, ale i když dvě neb tři rozličné tekutiny se stýkají v jedné ploše. Pokusy ty jsou velmi