Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Josef Studnička

O vzorci vyjadřujícím plochu trojúhelníku pomocí stran jeho

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 1 (1872), No. 5, 253–255

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122696`

$$\eta^2(1+\eta'^2)=r^2, \tag{10}$$

z nichž jen třeba vyloučiti pomocí rovnice (2) veličiny r a r', aby se obdržela differenciální rovnice hledané trochoidy.

Podobné zjednodušení možná provésti pro ten případ, že se hledá půdice nějaké křivky, jejíž trochoida jest přímka.

Neb zvolíme-li i tu přímku tuto za osu úseček, bude

$$\eta=0,\ \eta'=0,$$

načež ze soustavy rovnic (7) a (8) obdržíme jednoduché vzorce

$$-y'=\frac{r'}{r}, \tag{11}$$

$$y=r, \tag{12}$$

jejichž geometrický význam jest tak patrný jako v případě předcházejícím.

O vzorci vyjadřujícím plochu trojúhelníku pomocí stran jeho.

(Podle Baltzera podává dr. *F. J. Studnička*.)

Značí-li a, b, c strany trojúhelníka a s poloviční obvod, est p locha jeho $\varDelta$ určena vzorcem

$$\varDelta^2=s\,.\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c),$$

což ponejprv se vyskytuje ve spisech Heronových, jichž alexandrinští užívali co kompendia praktické geometrie a považovali za doplněk elementů Euklidových, jakž *Letronne* a *Martin* dokázali.

Poučka tato obsažena jest v Heronově geodaesii bez důkazu, v úplném spisu geodaetickém *περὶ διόπτρας* s důkazem, jejž *Venturi* r. 1814 (Com. sopra le storia e le teorie dell' ottica t. 1.) uveřejnil, načež v původním znění od *Vincenta* (Notices et extraits de MS. de le bibl. impér. t. 19, II. pag. 286) a *Hultsche* (Heronis reliquiae p. 235 a Zeitschr. f. Mbth. IX. p. 225) byl uveden.

Jiný starý důkaz této poučky sdělil podlé *Pacioliho* ve své trigonometrii (p. 109 a 374) *Pfleiderer*. Důkaz tento, jejž Venturi nalezl u *Leonarda Pisana* (Practica geometriae 1220, ed. Boncampagni p. 40), jest velmi jednoduchý a zasluhuje, aby se ho více všímalo, nežli se dosud děje.

Značí-li v trojúhelníku ABC (ob. 80) středy kruhů vepsaných D a D', poloměry jejich d a d' a délky tečen

$$AE = AF = \alpha,\ BF = BJ = \beta,\ CE = CJ = \gamma,$$
$$AL = AK = \alpha',\ BH = BK = \beta',\ CH = CL = \gamma'$$

a s poloviční objem, tu platí patrně

$$\alpha + \beta + \gamma = s,\ \alpha' - \beta' - \gamma' = s - a,$$

načež snadno si zjednáme, spojíme-li první rovnici tuto jednou s $\gamma = a - \beta$, na to s $\alpha = b - \gamma$, vzorce

$$\alpha = s - a,\ \beta = s - b,$$

a spojíme-li podobně druhou rovnici předešlou jednou s $\beta' + \gamma' = a$, podruhé s $\alpha' - \gamma' = b$, taktéž vzorce

$$\alpha' = s,\ \beta' = s - c;$$

a poněvadž $AED \sim AD'L$, bude

$$d : d' = \alpha : \alpha'$$

a mimo to, poněvadž $DFB \sim BKD'$, podobně

$$d : \beta = \beta' : d',$$

z kterýchžto dvou srovnalostí jde dále

$$\alpha' d^2 = \alpha \beta \beta',$$

aneb dosadíme-li známé hodnoty za α, α', β, β',

$$sd^2 = (s - a)(s - b)(s - c);$$

povážíme-li konečně, že

$$ADB + BDC + CDA = \Delta$$
$$\text{tedy } ad + bd + cd = 2\Delta,$$

z čehož snadno si zjednáme

$$\Delta^2 = d^2 s^2,$$

obdržíme konečně, použivše předposledního vzorce,

$$\Delta^2 = s(s-a)(s-b)(s-c).$$

Zároveň tu obdržíme pro úhly ještě vzorce známé

$$tg\frac{A}{2} = \frac{d}{s-a};\ tg\frac{B}{2} = \frac{d}{s-b},\ tg\frac{C}{2} = \frac{d}{s-c},$$

Méně jednoduchý jest důkaz Heronův, v němž se používá místo středu D' bodu proti A ležícího v kruhu vepsaném. Podobných pomůcek užívá též *Euler* (Variae demonstrationes in Nov. Comm. Petrop. 1), aby dokázal vzorec pro Δ^2. Bližší pomůcky volil *Castillon*, jehož důkaz opakuje *Baltzer* v Elem. der Math. II. pag. 122.

Ostatně sotva byl vzorec svrchu uvedený způsobem tím vynalezen, jaký shledáváme u Herona, Eulera a Castillona; nejspíše přišlo se k němu pouhým počtem, nikoli ale cestou geometrickou. Neb známá početní dedukce pro Δ^2, jakou shledáváme u *Newtona* (Arithm. universalis probl. geom. 11.), a od té doby v rozmanitých knihách učebných, zakládá se na úkonech, kteréž byly starým geometrům velmi dobře známy. Kterážto domněnka ještě tím více nabývá váhy, povážíme-li, že staří Indové (Brahmegupta v VI. stol. po Kr.) obdobný vzorec pro plochu trojúhelníku do kruhu vepsaného znali.*) A že by indičtí geometrové byli neodvislí od řeckých předchůdců, nelze více tvrditi od té doby, co *Albrecht Webr* svými přednáškami o literatuře indické opak toho dokázal; nejspíše se ku vzorci pro čtyrúhelník platícímu přišlo počtem podobným tomu, jaký se provádí při trojúhelníku.**)

Zajímavé jsou též poznámky, jež prof. *Möbius* při svých přednáškách r. 1840 o vzorci pro Δ^2 učinil.

Poněvadž plocha jest co do znamení neodvislá od označení stran, musí býti Δ^2 funkcí veličin a^2, b^2, c^2 a sice souměrnou i stejnoměrnou. Plocha ABC stane se 0, leží-li body A, B, C na jedné přímce, platí-li tedy podmínka

$$BC + CA + AB = 0.$$

Je-li tedy Δ^2 celistvou funkcí veličin a, b, c, musí se dáti děliti trinomy

$$a+b+c,\ a-b+c,\ a+b-c,\ a-b-c$$

a tudíž i součinem těchto výrazů aneb míti od a, b, c neodvislý poměr k determinantu souměrnému

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c, & o \\ b, & a, & o, & c \\ e, & o, & a, & b \\ o, & c, & b, & a \end{vmatrix}$$

(Berichte über die Verhandl. der k. sächs. Gesellsch. der Wiss. zu Leipzig, math. phys. Classe, XVII. Bd. 1865. pag. 3.)

---

*) Porovnej řešení 7. úlohy mathematické v III. sešitu tohoto časopisu na str. 153 od K. Zahradníka uveřejněné, jakož i poznámku na str. 154. připojenou.

**) Srovnej „Arneth“ Geschichte der reinen Mathematik, pag. 145 et seq.