

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Jan Krejčí

Začátky matematické krystallografie [IV.]

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 1 (1872), No. 5, 239–246

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/122697>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1872

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

Začátky mathematické krystallografie.

(Píše prof. Jan Krejčí.)

(Pokračování.)

II. Tvary poloměrné.

44. Plnoměrné tvary dají se souměrným vynecháním polovice ploch rozložití ve tvary *poloměrné* (hemiedrické), kteréž mají plochy těch samých úseků, avšak jen polovičný jich počet. Tentýž výsledek dá odvození z krychle. Střídavé vynechání podvojných ploch rovnoběžných, nebo přikrojení střídavých hran krychle dá totiž tvary s plochami *rovnoběžně poloměrnými*. Vynechání ploch_n ve střídavých obtantech, nebo přikrojení rohů krychle na střídavých rozích dá tvary s plochami *klonoplošně poloměrnými*. Vynechání střídavých ploch střídavě buď od pravé nebo od levé strany, neb přikrojení rohů krychle od pravé neb levé strany dá tvary s plochami *pravo-levě poloměrnými*.

Poloměrnost jest tudíž trojí: *rovnoběžná*, *klonoplochá* a *pravo-levá*.

Z toho též vychází, že poloměrnosti rovnoběžné jsou schopny toliko tvary s plochami d_n a o , poloměrnosti klonoploché jen tvary s plochami osmičetnými, a poloměrnosti pravo-levé jen osmačtyřicetníky.

Rozklad tvarů plnoměrných ve tvary poloměrné lze nejspíše znázorniti přenešením všech 48 polí osmačtyřicetníka na každý z nich a vynecháním těch polí dle naznačených tří způsobů poloměrnosti, při čemž se shledá, že dva tvary, totiž h a d nížádného rozkladu nejsou schopny; rovnoběžného rozkladu jen krychlový čtyřmécítník d_n a osmačtyřicetník O_s ; klonoplochého rozkladu jen osmistěn O , čtyřmécítníky O'_m , O_m a osmačtyřicetník O_s ; a konečně pravolevého rozkladu jen osmačtyřicetník O_s .

A. Poloměrnost rovnoběžná.

a) S plochami v poloze $\pm d_n$.

45. Jednostranným přikrojením hran krychle, nebo vynecháním střídavých ploch tvaru d_n , vyvinou se dva tvary dva-

náctiploché, které se od sebe rozeznávají jen postavou o 90° kolem kolmé hlavní osy otočenou. Znamka těch ploch jest $\pm d_n$, u Millera $\pi(n10)$. Poloměrný tvar takto vyvinutý, obr. 1., jest obmezen 12 souměrnými pětiúhelníky, z nichž každý jest obmezen hranou P nad plochami vepsané krychle a čtyřmi hranami H .

Hran P jest 6, hran H jest 24; tyto vytvářejí 8 pravidelně, ony s podvojnými hranami H 12 nepravidelně trojplachých rohů. Tvar ten slove *pětiúhelný dvanáctistěn* (Pentagonal-Dodekaëder).

Hlavní osy krychle ukončují se ve středu hran P , trojúhelné osy v pravidelných rozích; kosočtverečné osy nejsou vyznačeny zvláště patrným bodem.

46. Úseky ustanoví se buď z hrany P dle rovnice

$$n = \tan \frac{1}{2}P,$$

nebo z hrany H pomocí trojbokého výkrojků, obr. 73., O' , $\frac{1}{2}H'$, $\frac{1}{2}H$, v němž $\frac{1}{2}H' = 90^\circ$, $(o', h') = 30^\circ$, pročež

$$\cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{\cos \frac{1}{2}H}{\sin O'},$$

$$\sin O' = 2 \cos \frac{1}{2}H \sqrt{\frac{1}{3}},$$

načež ze spojkové hrany toho dvanáctistěnu s osmistěnem se nalezne v trojbokém výkrojků, obr. 74., $\frac{1}{2}O$, O' , $\frac{1}{2}O''$, v němž $\frac{1}{2}O'' = 90^\circ$, $\frac{1}{2}O = 54^\circ 44' 8''$, $\sin \frac{1}{2}O = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$$\cos(o, o'') = \cos O' \cdot \sqrt{\frac{2}{3}},$$

$$\frac{1}{2}P = (o, o'') + 45^\circ$$

$$n = \tan \frac{1}{2}P.$$

47. Jelikož dle všeobecné rovnice 12. jest

$$\cos P = -\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$$

$$\cos H = -\frac{n}{n^2 + 1},$$

jest pro $H = P$, totiž pro *pravidelný pětiúhelný dvanáctistěn*.

$$n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

což jest výraz neúměrný (irracionální), pročež se pravidelný pětiúhelný dvanáctistěn na vyhraněných hmotách objeviti nemůže.

b) S plochami v poloze $\pm O$.

48. Trojplochým přikrojením rohů krychle plochami podvojně rovnoběžnými, nebo rozkladem osmačtyřicetníka dle střídavých ploch podvojně rovnoběžných vyvinou se dva tvary, obmezené 24 lichoběžníky, které odtínají hrany krychle v poměru $1/m : 1/n : 1$.

Známka jejich jest tudíž $\pm o$, nebo u Müllera $\pi(mn 1)$.

Tvar ten slove *rovnoběžný čtyřmecitník* (Diploid). Tvar ten (obr. 75.) má všeobecné obrysy pětiúhelného dvanáctistěnu, jen že každá plocha toho dvanáctistěnu jest od středu hran P ve dví přelomena. Plochy ty setkávají se ve 12 hranách souhlasných s hranami O na o , ve 24 hranách H nad plochami vepsaného osmistěnu a ve 12 hranách P nad stejnojmenným hranami tvaru $\pm d_n$. Rohy jsou troje: 8 pravidelně trojplochých, v nichž se končí trojúhelné osy krychle, 6 souměrně čtveroplochých, v nichž se končí hlavní osy krychle a 12 nepravidelně čtveroplochých rohů. Osy kosočtverečné nejsou vyznačeny zvláště patrným bodem.

49. Hrana O jsouc prodloužena protíná hlavní osu ve vzdálenosti $= 1/n$, hrana P ve vzdálenosti $= 1$, kdežto osa, od níž ty hrany vycházejí, jest $1/m$.

50. Mezi odrůdami toho tvaru jsou též takové, v nichž jest hrana O rovnoběžná s hranou H . Nepravidelný roh jejich musí tedy od protilehlé roviny os tak vzdálen býti, jako roh trojúhelný. Pro trojúhelný roh jsou souřadnice

$$x = y = z.$$

Dosadíme-li ten výraz do rovnice plochy

$$ax + by + cz = 1, \text{ jest}$$

$$x = y = z = \frac{1}{a + b + c}.$$

Vezmeme-li nejmenší úsek za měřítko $= 1$, a tudíž na př. pro plochu o ,

$$\frac{1}{b} = 1, \quad \frac{1}{c} = m \quad \frac{1}{a} = \frac{m}{n}, \text{ nebo}$$

$$b = 1, \quad c = \frac{1}{m}, \quad a = \frac{n}{m}, \text{ jest}$$

$$x = y = z = \frac{m}{m + n + 1}.$$

Souřadnice nepravidelného rohu, z nichž delší $= s$, kratší s' , ustanoví se, je-li nejkratší osa $= 1$, střední $= \frac{m}{n}$, nejdelší $= m$, srovnalostmi

$$1 : m = s : m - s', \text{ pročež}$$

$$s = \frac{m - s'}{m},$$

$$1 : \frac{m}{n} = s' : \frac{m}{n} - s, \text{ pročež}$$

$$s' = \frac{m - ns}{m}.$$

Spojením obou souřadnic obdržíme délky obou souřadnic

$$s = \frac{m^2 - m}{m^2 - n}, \quad s' = \frac{m^2 - mn}{m^2 - n}.$$

Pro tvar s rovnoběžnými hranami P a H jest $x = s'$, tedy

$$\frac{m}{m + n + 1} = \frac{m^2 - mn}{m^2 - n}, \text{ nebo}$$

$$m = n^2.$$

Známka stejnostranného $\pm o$, jest tedy o_{n^2} , u Millera $\pi(n^2 n1)$.

51. K ustanovení úseků vůbec jest jako u tvaru o , nutno znáti dvě hrany.

Jsou-li známy hrany O , P , doplňme osmistěn obmezený těmi hranami hranou O' (obr. 75.), načež jest dle všeobecné rovnice 13.

$$\cos P + \cos O + \cos O'' = -1, \text{ a dle 9.}$$

$$m : n : 1 = \cos \frac{1}{2} O' : \cos \frac{1}{2} P : \cos \frac{1}{2} O.$$

Nebo se ustanoví z hran O , P , obr. 75.

$$\cos(p, a) = \frac{\cos \frac{1}{2} O}{\sin \frac{1}{2} P}, \quad \cos(o, a) = \frac{\cos \frac{1}{2} P}{\sin \frac{1}{2} O}, \text{ načež jest}$$

$$m = \tan(p, a), \quad \frac{m}{n} = \tan(o, a),$$

$$n = \frac{\tan(p, a)}{\tan(o, a)}.$$

52. Jsou-li známy hrany O, H , ustanoví se z trojbokého výkrojků $O', \frac{1}{2}H', \frac{1}{2}H$ (obr. 75.), v němž $\frac{1}{2}H' = 90^\circ$, $(o', h') = 30^\circ$

$$\sin O' = 2 \cos \frac{1}{2}H \sqrt{1/3}.$$

Ve spojení s osmistěnem (obr. 76.) dá plocha O , výkrojek $\frac{1}{2}O, O', \frac{1}{2}O''$, v němž $\frac{1}{2}O'' = 54^\circ 44' 8''$,

$$\cos \frac{1}{2}O'' = \sqrt{1/3}, \quad \sin \frac{1}{2}O'' = \sqrt{2/3},$$

$$\cos(o, o'') = \frac{\cos O' \sqrt{3} - \cos \frac{1}{2}O}{\sin \frac{1}{2}O \sqrt{2}}.$$

Jelikož $(o, o'') + 45^\circ = (o, a)$, jest

$$\frac{m}{n} = \tan(o, a)$$

$$m = \tan \frac{1}{2}O \cdot \sin(o, a)$$

$$n = \frac{m}{\tan(o, a)}.$$

53. Známe-li hrany P, H , jest

$$\sin O' = 2 \cos \frac{1}{2}H \sqrt{1/3}$$

a ve spojení s osmistěnem (obr. 76.) ve výkrojků $\frac{1}{2}P, O', \frac{1}{2}O''$

$$\cos(p, o'') = \frac{\cos O' \sqrt{3} - \cos \frac{1}{2}P}{\sin \frac{1}{2}P \cdot \sqrt{2}}$$

$$m = \tan(p, a)$$

$$\frac{m}{n} = \tan \frac{1}{2}P \cdot \sin(p, a).$$

Zobrazení rovnoběžně poloměrných tvarů.

54. Zobrazení děje se pomocí krychle, do níž se vnesou hlavní a trojúhelné osy, načež se ustanoví poloha pravidelných a nepravidelných rohů.

Pro *pětihúelný dvanáctistěn* $\pm d_n$ jest trojúhelná osa, jakó ve tvaru d_n

$$t = \frac{n \sqrt{3}}{a + 1}.$$

Poloha nepravidelného rohu ustanoví se ze souřadnic jeho s a s' (obr. 73.), které leží v rovině dvou hlavních os.

Vezme-li se hlavní osa $= 1$, jest dle srovnalosti

$$1 : n = s' : n - 1$$

$$s' = \frac{n - 1}{n} = \frac{1}{2}p,$$

totiž rovná se délce polovičné hrany p ., kdežto

$$s = 1.$$

Nepravidelné rohy takto nalezené spojí se přiměřeně s konečnými body trojúhelných os.

Pro *rovnoběžný čtyřmécítmík* $\pm O$, (obr. 75.) jest jako ve tvaru O ,

$$t = \frac{m\sqrt{3}}{m+n+1}.$$

Je-li hlavní osa $= 1$, jest

$$s = \frac{m^2 - m}{m^2 - n}$$

$$s' = \frac{m^2 - mn}{m^2 - n}.$$

Dle těch rovnic ustanoví se v rovinách dvou hlavních os poloha nepravidelných rohů, tedy vždy nad hranami vepsaného osmistěnu, načež se ty rohy přiměřeně spojí jak s hlavními tak i s trojúhelnými osami.

Spojky rovnoběžně poloměrných tvarů.

55. Do řady těchto tvarů náleží mimo $\pm d_n$ a $\pm O$, též všechny plnoměrné tvary, které poloměrnosti rovnoběžné schopny nejsou, tedy h , d , O^1/m , O_m . Mezi spojkami těch tvarů jsou nejhojnější ty, na nichž převládá h , O neb $\pm d_n$.

Ustanovení ploch děje se tímž způsobem jako u plnoměrných tvarů.

Následující příklady vysvětlí, jak se to ustanovení děje. Obrázce 77., 78., 79 představují tvary *Kobaltinu*.

Na obr. 77. jest vyobrazena spojka O a $+d_n$. Jelikož spojková hrana stojí kolmo na hraně osmistěnu, totiž na straně pravidelného trojúhelníka, což činí též prodloužená strana pravidelného šestistěnu, náleží $+d_n$ k onomu d_n , jehož šestiploché rohy otupuje osmistěn v podobě pravidelného šestiúhelníka (viz 14. u plnoměrných tvarů), pročež

$$+d_n = +d_2 = +i.$$

Jsou-li obě plochy O a $\pm d_n$ v rovnováze, což se jeví na $\pm d_n$ otupením pravidelných rohů (obr. 78.), nabývá spojka podoby *dvacetistěnu*, obmezeného 8 stejnostrannými trojúhelníky O , a 12 stejnoramennými trojúhelníky $\pm d_n$.

V pravidelném dvacetistěnu (Ikosieder), kterýž jest obmezen samými stejnostrannými trojúhelníky, má se polovičná strana trojúhelníku k výšce jeho, jako $1 : \tan 60^\circ$, čili jako $1 : \sqrt{3}$.

Tvar $\pm d_n$, z něhož by se dal otupením pravidelných rohů vyvinouti pravidelný dvacetistěn, musil by býti obmezen takovými pětiúhelníky, aby se spojením nepravidelných rohů do nich daly vepsati stejnostranné trojúhelníky, a tedy aby se polovičná hrana $\frac{1}{2}p$ měla k výšce O pětiúhelníka jako $1 : \sqrt{3}$.

Vezmeme-li hlavní osu $= 1$, jest

$$\frac{1}{2}p = \frac{n-1}{n},$$

$$o^2 = a^2 + k^2,$$

kdežto $a = 1$, $k = 1 - \frac{n-1}{n} = -\frac{1}{n}$, pročež

$$o = \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n}.$$

V pravidelném dvacetistěnu jest tedy

$$\frac{1}{2}p : o = \frac{n-1}{n} : \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n} \text{ nebo je-li } \frac{1}{2}p = 1,$$

$$1 : \sqrt{3} = \frac{n-1}{n} : \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n}, \text{ z čehož}$$

$$n = \frac{3 + \sqrt{5}}{2},$$

což jest výrazem neuměrným, a tedy na vyhraněných tvarech nemožným.

Pravidelný dvacetistěn nemůže se tedy na vyhraněných tvarech objeviti.

Obrazec 79. představuje spojku, na níž se dle polohy ustanoví plochy h co plochy krychle,

O co plochy osmistěnu,

$+ d_n$, $+ d_n$ co plochy dvanáctistěnu,

$+ O$, co plochy nějakého 24stěnu.

K ustanovení d_n a d_n změří se

$$d_n : h = 153^\circ 26'$$

$$d_n : h = 165^\circ 58',$$

z čehož vychází

$$\frac{1}{2}P = 153^\circ 26' - 90^\circ = 63^\circ 26'$$

$$\frac{1}{3}P' = 165^\circ 48' - 90^\circ = 75^\circ 58',$$

načež z $n = \tan \frac{1}{2}P$ ustanoví se $n = 2$,

$$\text{z } n' = \tan \frac{1}{2}P' \quad n' = 4.$$

Plocha $+O_s$ leží v pásmu O, O_s, d_2 .

Pro O_s jest $abc = 1nm$

$$O \quad a'b'c' = 111$$

$d_2 \quad a''b''c'' = 012$, z čehož dle 18. neb 19. všeobecné krystalografie

$$n = \frac{m+1}{2}.$$

K dalšímu ustanovení změří se úklon

$$O_s : O = 164^\circ 46' = O',$$

načež dle všeobecné rovnice 12., vložíme-li do ní

$$abc = 1 \frac{m+1}{2} m$$

$$a'b'c' = 111, \text{ jest}$$

$$\cos O' = - \frac{3(m+1)}{\sqrt{3} \sqrt{5m^2 + 2m + 5}}, \text{ z čehož}$$

$m = \frac{1}{2}, n = \frac{3}{4}$, nebo dle srovnalosti

$$m : n : 1 = \frac{1}{2} : \frac{3}{4} : 1 \text{ se objeví}$$

$$m : n : 1 = 2 : 3 : 4 \text{ a tudíž}$$

$$O_s = a^{1/2} b^{1/3} c^{1/4}.$$

Známka celého tvaru jest tedy dle našich symbolů:

	h	$+i$	$+d_2$	$+O_s$	O
dle Millera:	100	$\pi(210)$	$\pi(410)$	$\pi(432)$	111
dle Naumanna:	∞O	$\frac{\infty O2}{2}$	$\frac{\infty O4}{2}$	$\frac{2O^{4/3}}{2}$	O

O rychlosti světla v prvcích lučebných.

Podává prof. K. V. Zenger.

Theoretické určování rychlosti zvuku jest, jak známo, velmi přesné a shoduje se se zkušeností; pročez shoda výjevů zvukových a světlových pohybů vlnitých přivedla záhy přírodopytce na myšlenku, stejnými mathematickými výrazy domáhati se i rychlosti světla v rozličných ústředích.