Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Jaroslav Doležal

Trojúhelník abc osvětliti tak, aby stín jeho na průmětně měl daný tvar $a_0 b_0 c_0$

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 36 (1907), No. 2, 203--208

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122711`

Trojúhelník abc osvětliti tak, aby stín jeho na průmětně měl daný tvar $a_0b_0c_0$.

Napsal prof. Jar. Doležal.

Způsob řešení předložené úlohy záleží na formě osvětlení, jsou-li totiž paprsky světelné rovnoběžné (*osvětlení geometrálné*), nebo různoběžné (*osvětlení centrálné*). Každým z těchto 2 případů budeme se zabývati zvláště.

A) *Při osvětlení geometrálném* jedná se o stanovení směru světelného paprsku S.

Je-li $\triangle abc$, v rovině ϱ obsažený, daný trojúhelník,

$\triangle a_1b_1c_1$ jeho půdorys,

$\triangle a'b'c'$ vržený stín $\triangle abc$ na půdorysně a

$\triangle a'_1b'_1c'_1$ půdorys tohoto vrženého stínu, potom, jak známo, jest

$$\triangle a'b'c' \text{ affinní s } \triangle abc,$$
$$\triangle a'_1b'_1c'_1 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \triangle a_1b_1c_1,$$

při čemž *osou affinity* jest *půdorysná stopa* P^ϱ roviny $\triangle abc$ (resp její půdorys $P^\varrho{}_1$), *směrem affinity* pak jest *směr světelných paprsků* S (resp. směrem půdorysu S_1 světel. pap.). Položme si za úlohu stanoviti světelný paprsek bodu a, $S^a \equiv \overline{aa'}$.

Ježto parallelním promítáním poměr úseček téže přímky se nemění, odpovídá středu o strany $\overline{bc}$ střed o' strany $\overline{b'c'}$, tedy těžnici $\overline{ao}$ v $\triangle abc$ těžnice $\overline{a'o'}$ v $\triangle a'b'c'$: těžnice tyto sekou se v bodu IV na ose P^ϱ.

Úhly $\delta = b'a'o'$, $\varepsilon = c'a'o'$, jež svírá těžnice $\overline{a'o'}$ se stranami $\overline{a'b'}$, $\overline{a'c'}$ *jsou dány*, ježto má býti

$$\triangle a'b'c' \sim a_0b_0c_0\,;$$

je-li tedy o_0 střed strany $\overline{a_0b_0}$ daného tvaru $a_0b_0c_0$, jest

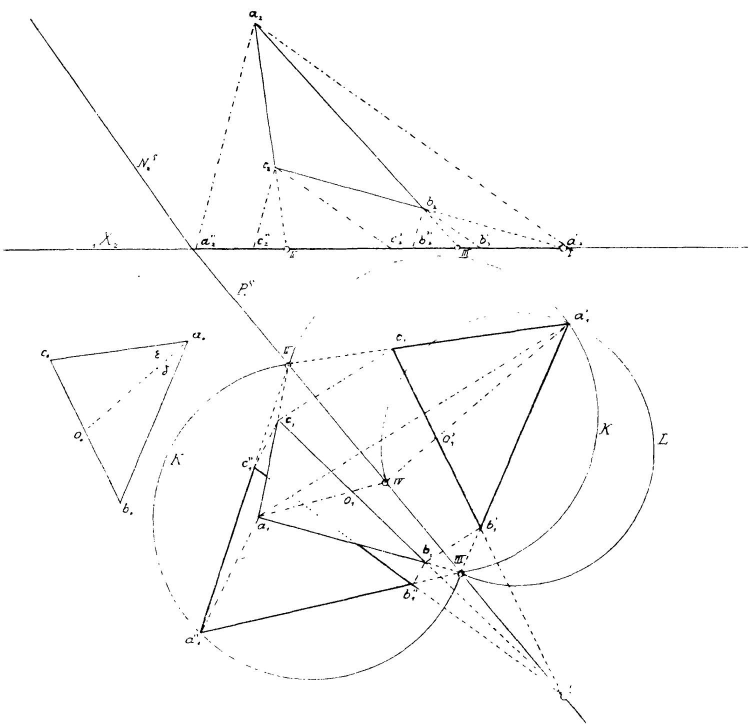
$$\sphericalangle\, \delta = b_0a_0o_0, \quad \sphericalangle\, \varepsilon = c_0a_0o_0.$$

Z uvedených úvah vyplývá tato *konstrukce* bodu a'_1, jenž jest půdorysem vrženého stínu bodu a (obr. 1.):

Jsou-li body III, II, I stopníky půdorysné stran $\overline{ab}$, $\overline{ac}$, $\overline{bc}$ trojúhelníka abc, jest vržený stín a' (resp. jeho půdorys) určen *dvěma geometrickými místy*:

1. Kruhovým obloukem K nad tětivou $\overline{II\,III}$ a nad středovým úhlem $\widehat{III\,S\,II} = 360^0 - 2\alpha$, kde $\alpha = \sphericalangle\, b_0a_0c_0$.

2. Kruhovým obloukem L nad tětivou $\overline{III\,IV}$ a nad středovým úhlem $\overline{III\,S'IV} = 360 - 2\delta$, kde $\delta = \sphericalangle\, b_0 a_0 o_0$. *Oblouky K, L majíce jeden bod III společný, protínají se již jen v jednom dalším bodu a'* (resp. a'_1).



Obr. 1.

Spojnice $\overline{aa'}$ určuje paprsek světelný (směr affinity) S^a, spojnice $\overline{a_1 a'_1}$ stanoví půdorys S^a_1, a poněvadž nárys stínu jest v ose X, dává spojnice $\overline{a_2 a'_2}$ nárys S^a_2, čímž úloha jest řešena.

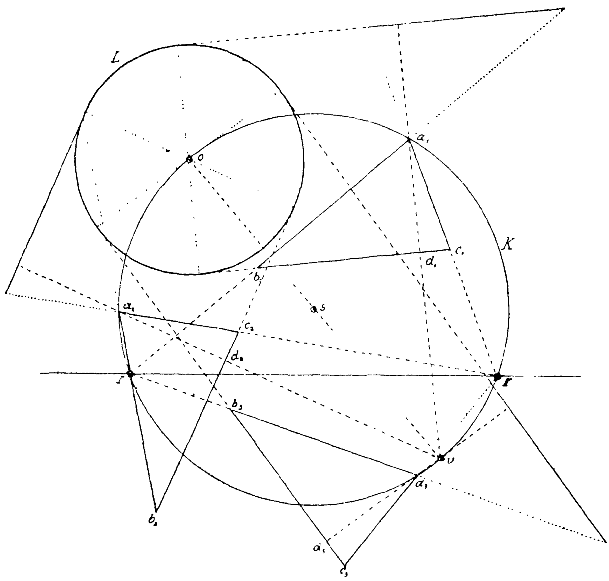
Ježto oblouky K, L zobraziti lze *po obou stranách půdorysné stopy P^ϱ*, má úloha obecně *dvě řešení.*

B) *Při osvětlení centrálném* jest předložená úloha *neurčitou* v I. stupni, ježto, volíme-li na oblouku K (obr. 1.) libovolný bod a' co vržený stín bodu a, lze vždy bodem I vésti příčku ku spojnicím $\overline{a'II}$, $\overline{a'III}$, aby s nimi tvořila $\triangle a'b'c' \sim a_0b_0c_0$, při čemž vždy budou paprsky $\overline{a'a}$, $\overline{b'b}$, $\overline{c'c}$ procházeti jediným bodem s, středem světla (*věta Desarguesova*).

Má-li úloha státi se určitou, nutno tu položiti *další podmínku*, a tou učiňme *velikost stínu*; bude pak stín

$$\triangle a'b'c' \cong a_0b_0c_0,$$

maje s ním stejný tvar i velikost.



Obr. 2.

Prve než přistoupíme k řešení této úlohy, pozorujme, *jakou křivku obaluje základna $\overline{ab}$ trojúhelníka abc, jehož vrchol a pohybuje se po kružnici K a jehož ramena $\overline{ab}$, $\overline{ac}$ procházejí dvěma pevnými body I, II této kružnice* (obr. 2.).

Jsou-li $\triangle a_1b_1c_1$, $\triangle a_2y_2c_2$, $\triangle a_3b_3c_3$ tři takové polohy pohybujícího se $\triangle abc$, a dále $\overline{a_1d_1}$, $\overline{a_2d_2}$, $\overline{a_3d_3}$ výšky těchto tří trojúhelníků, jsou patrně obvodové úhly

$$\sphericalangle\ Ia_1d_1 = Ia_2d_2 = Ia_3d_3 = bad \text{ v daném } \triangle abc,$$
$$\sphericalangle\ IIa_1d_1 = IIa_2d_2 = IIa_3d_3 = cad \quad „ \quad „$$

pročež *výška* $\overline{ad}$ *pohybujícího se trojúhelníka abc prochází* v každé z poloh *pevným bodem v na kružnici K.*

Je-li dále *o* protějším bodem ku průsečíku výšek v na kružnici K, jest patrně *vzdálenost bodu o od základen* $\overline{a_1b_1}$, $\overline{a_2b_2}$, $\overline{a_3b_3}$, . . . *stejná,* a sice *rovna výšce* $\overline{ad}$ $\triangle abc$. Z toho vyplývá důležitá věta:

Základna $\triangle abc$, *jehož vrchol a pohybuje se po kružnici K a jehož ramena* $\overline{ab}$, $\overline{bc}$ *probíhají stále dvěma pevnými body I, II téže kružnice K, obaluje kružnici L, jejíž střed o jest protějším bodem kružnice K vzhledem k průsečíku v výšky ad pohybujícího se* $\triangle abc$ *s kružnicí K, a jejíž poloměr rovná se výšce* $\overline{ad}$ *daného trojúhelníka.*

Věty právě vyslovené lze užíti k řešení druhého z případů, jež jsme si předložili, totiž:

Trojúhelník *abc* osvětliti *centrálně* tak, *aby vržený stín jeho na průmětně byl shodný s* $\triangle a_0b_0c_0$.

Je-li $\triangle abc$, obsažený v rovině ϱ, daný trojúhelník,

$\triangle a_1b_1c_1$ jeho půdorys,

$\triangle a'b'c'$ vržený stín $\triangle abc$ na půdorysně a

$\triangle a'_1b'_1c'_1$ půdorys tohoto vrženého stínu,

jest, jak známo.

$\triangle a'b'c'$ kollineárný s $\triangle abc$,

$\triangle a'_1b'_1c'_1$ „ „ $\triangle a_1b_1c_1$,

kdež *osou kollineace jest půdorysná stopa* P^ϱ roviny ϱ $\triangle abc$ (resp. její půdorys), *středem kollineace pak jest hledaný zdroj světla s* (resp. jeho půdorys s_1).

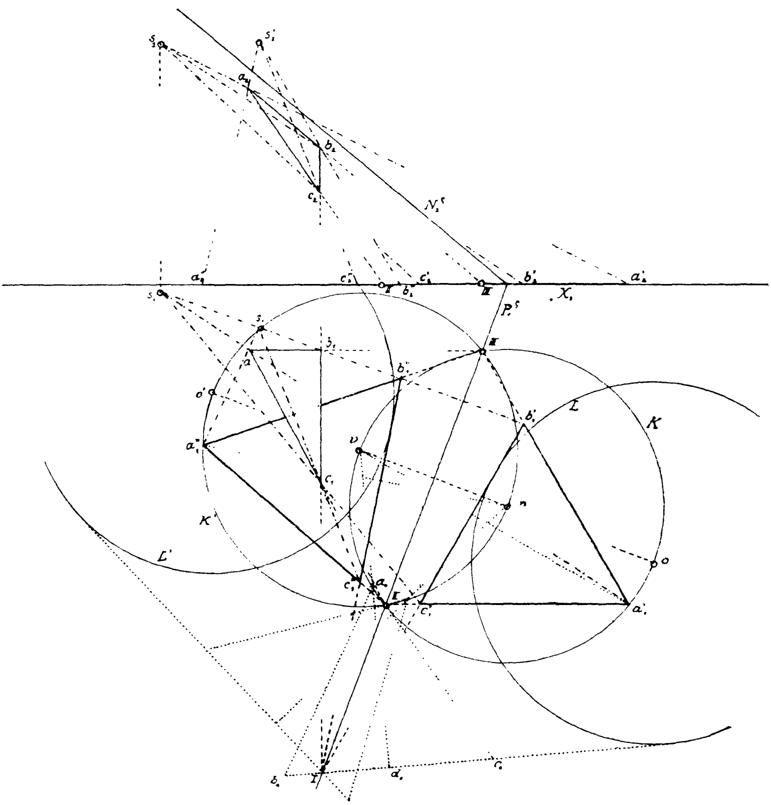
Jsou-li body *III, II, I půdorysné stopníky* stran $\overline{ab}$, $\overline{ac}$, $\overline{bc}$ daného $\triangle abc$, jest patrně:

Geom. místem vrženého stínu a' bodu a kružnice K procházející body *II, III,* jejíž střed m stanoven jest tím, že $\sphericalangle\, II m III = 360^0 - 2\alpha$, kde $\alpha = \sphericalangle\, b_0a_0c_0$.

K vůli zajímavosti volme na př. $\triangle a_0b_0c_0$ *rovnostranným* (obr. 3.).

Zobrazme nyní jednu polohu $\triangle a_0b_0c_0$ tak, aby vrchol a_0 byl na kružnici K a aby ramena $\overline{a_0b_0}$, $\overline{a_0c_0}$ procházela body *III, II*; výška $\overline{a_0d_0}$ ustanoví na kružnici K bod v (průsečík výšek), k němuž sestrojme protější bod o kružnice K; konečně opišme z bodu o co středu poloměrem $\overline{ad}$ kružnici L, jež jest obálkou základny pohybujícího se $\triangle a_0 b_0 c_0$.

Základna $a'b'$ stínu jest *tečnou kružnice L a prochází půdorysným stopníkem I strany* $\overline{ab}$, lze tedy polohu její ihned rýsovati, kdežto *výška stínu* $\overline{a'd'}$ *procházejíc bodem v jest kolmá*



Obr. 3.

ku $a'b'$; výška tato jest *druhým geom. místem stínu a'* (resp. jeho půdorysu a'_1).

Spojnice $\overline{a'III}$, $\overline{a'II}$ vytknou na zmíněné základně (tečně z bodu I ku kružnici L) body b', c' co stíny bodů b, c, načež *spojnice* $\overline{aa'}$, $\overline{bb'}$, $\overline{cc'}$ *stýkají se v hledaném středu světla s* (resp.

půdorysy $\overline{a_1 a'_1}$, $\overline{b_1 b'_1}$, $\overline{c_1 c'_1}$ v půdorysu středu s_1), čímž úloha jest řešena.

Nárys $a'_2 b'_2 c'_2$ stínu jest v ose X, načež spojnice $\overline{a_2 a'_2}$, $\overline{b_2 b'_2}$, $\overline{c_2 c'_2}$ stanoví nárys středu s_2.

Kružnice K, L zobraziti lze *po obou st anách půdorysné stopy* P^{ϱ}, z bodu I pak lze vésti ku každé z kružnic L *dvě tečny*, úloha tedy obecně má *čtvero řešení*, z nichž dvě však, jak patrno z obrazce, mají význam pouze *geometrický*, ježto v případech těch střed světla nalézá se mezi $\triangle$ *abc* a průmětnou.

Mosaika.

V časopisech fysikálních a paedagogických vede se diskusse o novém způsobu vyučovati fysice na středních školách. Jde o fysikální praktikum. Místo abych Vám, mladí přátelé, vykládal, oč se při tom jedná, budu Vám vyprávěti něco z vlastní zkušenosti. V prvních letech mého působení na universitě, když jsem zařizoval laboratoř fysikální v Klementinu, chodíval ke mně mladý student kvartán, syn vážené a se mnou spřátelené rodiny pražské, a díval se, co jsem v laboratoři pro své „praktikanty" chystal. Tak totiž říkáme těm studujícím na vysokých školách, kteří připravujíce se k úřadu professorů na školách středních, pracují samostatně v laboratoři fysikální. Tehda bylo těchto praktikantů málo, asi 20, dnes je jich 8-krát tolik. Řekl jsem jednou svému studentovi, jenž zde jako host rád meškal, aby si sedl k vahám a určil mi specifickou váhu galenitu (leštěnce olověného). Ve škole se mu již o specif. váze vykládalo. Sedl si s chutí k vahám, začal vážiti — mimochodem řečeno velmi neobratně, i věcem nejjednodušším musí se člověk učiti. Řekl jsem mu, jak se zlacená závaží kladou na misku vah, jak se nesmějí bráti do rukou — k tomu měl on nejvíc chuti — jak se vybírají a sečítají dohromady, potom jak se galenit zavěsí na drátek, jak se vnoří do vody, — upozornil jsem na bublinky vzduchové, jež při vnoření byly strženy a jak se odstraňují atd. Konečně, když několik nehod šťastně překonal a dostal výsledky, řekl jsem, aby specif. váhu vypočítal. Když byl hotov — počítal asi na 7 decimál — řekl si: Tak to je ta specifická váha! teď