Josef Klíma

Poznámka k sestrojování oskulačních hyperboloidů ploch zborcených

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 54 (1925), No. 1, 39--42

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123143

Poznámka k sestrojování oskulačních hyperboloidů ploch zborcených.

Napsal Dr. *Josef Klíma.*

Dána-li plocha zborcená třemi řídícími křivkami, byla konstrukce oskulačního hyperboloidu podél vytvořující přímky podána rozmanitým způsobem.[1]) V následujícím budeme se zabývati sestrojením oskulačního hyperboloidu podél vytvořující přímky plochy zborcené, při níž dvě ze tří řídících křivek splynou v jedinou a dány jsou křivkou (B) na ploše **B**, takže vytvořující přímky dotýkají se plochy **B** v bodech křivky (B) a protínají mimo to křivku jistou (A). Úlohou touto zabývali se již profesoři Ed. Weyr[2]), Jan Sobotka[3]) a Bedřich Procházka[4]). Řešení Weyrovo je však neúplné, jak v dalším ukážeme.

Uvažujme stejně, jako prof. Weyr, nejprve zvláštní případ na kterýžto se dá obecný případ převésti, že totiž plocha **B** je plochou kuželovou druhého stupně $\mathbf{K}^2$ o vrcholu o křivka (B) na ní kuželosečkou B^2 a křivka řídící nechť je přímkou A.

Jednu polohu P vytvořující přímky dostaneme, sestrojíme-li v bodě b kuželosečky B^2 rovinu tečnou τ_b a stanovíme její průsečík a s přímkou řídící A, i je $P \equiv \overline{ab}$. Plocha zborcená, již vytvoří P, je stupně čtvrtého a sice dle rozdělení Sturmova[5]) typu V. Byly-li by totiž na ploše kuželové $\mathbf{K}^2$ dány dvě kuželosečky B^2 a ${}^1B^2$,

---

[1]) Prvý, který úlohu tu řešil, byl Mannheim v „Cours de géometrie descriptive" vyd. roku 1880, str. 442 a sice geometrii kinematickou. Téhož roku řeší úlohu tu prof. Ed. Weyr „Construction der Osculationshyperboloide windschiefer Flächen" ve zprávách Vídeňské akademie, roč. 1880 str. 7. V roce 1883 prof. Jos. Šolín v pojednání „Über die Construction der Osculationhyperboloide zu vindschiefen Flächen" ve zprávách Královské české společnosti nauk str. 11, podává dvojí řešení této úlohy. Prof. dr. Jan Sobotka provádí určení oskulačního hyperboloidu několikerým způsobem a to ve dvou pojednáních: „Zur Construction der Osculationshyperboloide vindschiefer Fläche" ve věstníku Společ. nauk roč. 18t3, čís. 14 a „Zur Construktion der Osculationshyperboloide von Regelflächen" tamtéž roč. 1907. Cestou geometrie kinematické řeší úlohu tu též prof. Bedřich Procházka „Příspěvek k sestrojení oskulačních hyperboloidů ku plochám zborceným" v rozpravách České Akad., roč. 1897, číslo 15. Ještě jiné řešení úlohy této je od Duporcq „Sur l'hyperboloide osculateur à une surface réglée le long d'une génératrice" v Nouvelles Annales, roč. 1898.

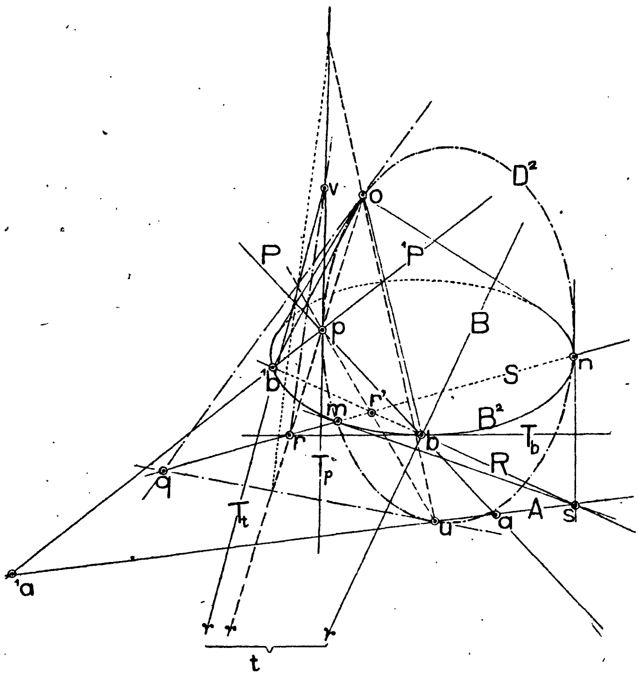
[2]) V pojednání „O sestrojení oskulačních hyperboloidů k plochám zborceným" uveř. v roce 1896 v rozpr. České Akademie čís. 5.

[3]) Roku 1903 „Zur Construction von Osculationshyperboloiden an vindschiefe Flächen" ve zprávách o zasedání Společ. nauk čís. XXXV.

[4]) V uvedném již pojednání, neb též „Vybrané statě z deskr. geometrie" díl VI., odst. 339—342.

[5]) „Liniengeometrie" díl I., str. 52—61.

pak zborcená plocha, daná řídícími křivkami B^2, ${}^1B^2$, A je stupně $2.2.2 - 2.1 = 6$. V případě, že $B^2 \equiv {}^1B^2$, tu odpadne ještě dvakráte počítaný svazek paprskový v rovině β kuželosečky B^2, mající svůj střed v průsečíku s přímky A s touto rovinou a zbývá tudíž zborcená plocha stupně čtvrtého. Přímka A je pro tuto zborcenou plochu přímkou dvojnou, neboť z libovolného jejího bodu lze ke $\mathbf{K}^2$ vésti dvě tečné roviny a jich dotyčnými body na B^2 procházejí



příslušné vytvořující přímky plochy. V libovolné rovině ϱ jdoucí přímkou A jsou vždy dvě vytvořující přímky, jež sestrojíme takto. Stopa R roviny ϱ, (obr.) na rovině β kuželosečky B^2, prochází stopníkem s přímky A na rovině β a protíná kuželosečku B^2 ve dvou bodech b, ${}^1b$. Roviny tečné τ_b, τ_{1b}, sestrojené v těchto bodech ke $\mathbf{K}^2$, obsahují přímky $\overline{ob}$, $\overline{o^1b}$ kužele a jich stopy na rovině β jsou tečny T_b, T_{1_b}, jež procházejí pólem r přímky R vzhledem k B^2. Průsečnice $\overline{or}$ rovin τ_b, τ_{1b} obsažena je v polárné rovině σ bodu s ke kuželi $\mathbf{K}^2$, jejíž stopa S na rovině β je polárou bodu s k B^2. Rovina σ protíná přímku A v bodě u, jenž spojen s průsečíkem $r' \equiv (RS)$ dává stopu roviny ϱ na rovině σ a ta protíná přímku $\overline{or}$ ve společném bodě p obou vytvořujících přímek $P \equiv \overline{pba}$, ${}^1P \equiv \overline{p^1b^1a}$ plochy zborcené, jež jsou obsaženy v rovině ϱ. Otáčí-li se rovina ϱ kol přímky A, naplní body p v rovině σ

dvojnou kuželosečku D^2 plochy, jež je vytvořena projektivními svazky paprskovými $u(r' \ldots) \,\overline{\wedge}\, o(r \ldots)$. Kuželosečka dvojná protíná dvojnou přímku A v bodě u, prochází vrcholem o kuželové plochy a tečny v těchto bodech jdou patrně pólem q spojnice $\overline{s(S, ou)}$ vzhledem k B^2. Dvojná kuželosečka jde též průsečíky m, n poláry S s kuželosečkou B^2; přímky $\overline{sm}, \overline{sn}$ jsou torsálními přímkami plochy, podél nichž plochy dotýkají se roviny (Am), resp. (An).[6])

Přistupme nyní k sestrojení oskulačního hyperboloidu **H** k této ploše podél vytvořující přímky P. Tento obsahuje přímku řídící A, a dále, ježto ploše zborcené dle B^2 je opsán kužel $\mathbf{K}^2$, je druhá asymptotická tečna B v bodě b této plochy harmonicky sdruženou k vytvořující přímce P vzhledem ke konjugovaným tečnám $\overline{ob}$ a T_b (tečna to v b k B^2).

Přímka tato B náleží též oskulačnímu hyperboloidu **H**. Dále určíme stopu L^2 tohoto na rovině σ dvojné kuželosečky D^2. Je to patrně kuželosečka oskulující dvojnou kuželosečku D^2 v bodě p a procházející stopníkem t přímky B (stopník ten je na $\overline{or}$) na σ a stopníkem u přímky A na σ, čímž kuželosečka ta určena. Kuželosečka L^2 je s D^2 ve vztahu kollineace, jejíž střed je p a osa $\overline{pu}$. Bodu o kuželosečky D^2 odpovídá bod t kuželosečky L^2. Tečně $\overline{oq}$ kuželosečky D^2 odpovídá tečna T_t kuželosečky L^2 v bodě t, protínající se na ose kollineace $\overline{pu}$. V bodě p mají obě kuželosečky společnou tečnu T_p, již snadno odvodíme větou Pascalovou při kuželosečce D^2, znajíce pro tuto dvě tečny $\overline{qo}$, $\overline{qu}$ s dotyč. body o, u a bod p (přímka Pasc. spojuje ($\overline{op}$, $\overline{uq}$) s ($\overline{up}$, $\overline{oq}$) a tečna T_p protíná se na této se spojnicí $\overline{ou}$). Kuželosečka L^2 určena tedy dvěma tečnami T_p, T_t s dotyč. body p, t a bodem u. Hyperboloid **H** určen kuželosečkou L^2 a přímkami A a B, jež tuto protínají.

Prof. Ed. Weyr v uvedeném pojednání určuje hyperb. **H** přímkami A, B a rovinou polárnou ω bodu o k tomuto. Polárná tato rovina ω jde tečnou T_b kuželosečky B^2 v b a další její bod určuje tím, že z o sestrojuje příčku k přímkám A a B a na ní stanoví bod harmonický k bodu o vzhledem k průsečíkům s těmito přímkami. Leč tato příčka je přímka $\overline{ao}$ a bod harmonický je opět na T_b, ježto $(PBT_b, \overline{ob}) = -1$ a tudíž rovina ω není určena a řešení prof. Weyra nevedlo by k cíli. Dle naší konstrukce tato rovina polárná je určena tečnou T_b a polárou bodu o ke kuželosečce L^2, jež zřejmě spojuje bod r s průsečíkem v tečen T_t a T_p.

Jak obecné případy lze převésti na předchozí, uvádí prof. Weyr

[6]) Jiné vlastnosti na př. Ameseder „Beitrag zur Theorie der Regelflächen vierten Grades mit einem Doppelkegelschnitt“ zprávy Vídeň. Akademie roč. 1880, str. 271—299; též uvažuje o ploše té prof. dr. Jos. Klobouček v pojednání: „O zborcených plochách, které mají danou asymptotickou plochu“ v tomto čas. roč. XLIX str. 104—106.

v uvedeném pojednání. V případě totiž, že místo přímky řídící A dána obecná křivka (A), tu určíme přímku B oskul. hyperboloidu **H** v bodě b stejně a sestrojíme ještě jeho přímku téže soustavy A, jdoucí bodem a takto. Všechny hyperboloidy, jež dotýkají se zborcené plochy dle přímky P, obsahují přímku B a oskulují křivku (A) v bodě a, tvoří svazek ploch 2°, jenž obsahuje též hyperboloid **H** a jehož základní křivka rozpadá se v přímku P, soumeznou P', přímku B a ještě v jednu přímku A, jež prochází bodem a. Je-li α oskulační rovina křivky (A) v bodě a, tu stopy všech hyperboloidů svazku na této rovině tvoří svazek kuželoseček, jež oskulují křivku (A) v a a procházejí stopníkem t přímky B na α. Svazek ten vytíná na průsečnici $(\alpha\,\beta)$ involuci, jejímiž páry, myslíme-li si proloženy kuželosečky, jež oskulují kuželosečku B^2 v b, dostaneme v rovině β svazek kuželoseček, jehož další základní bod s je bodem přímky A, jež tím je určena. Bod s dostane se snadno uvažováním de generovaných kuželoseček těchto svazků. Tím úloha převedenana dříve řešenou.

Dána-li konečně zborcená plocha obecně, že dotýká se plochy **B** v bodech křivky (B)a obsahuje křivku obecnou (A), tu nahradíme rozvinutelnou plochu, jíž obalují roviny tečné plochy **B** v bodech křivky (B), při konstrukci oskul. hyperboloidu podél vytvořující přímky $P \equiv \overline{ab}$, oskul. kuželem 2° podél přímky $\overline{ob}$ rozv. plochy, kde o je příslušný bod na hraně vratu. Křivku (B) pak nahradíme řezem tohoto kužele s oskulační rovinou β této křivky v bodě b a tím úlohu tu převedeme na předchozí.

*

Remarque à la construction des hyperboloïdes osculateurs des surfaces gauches.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur construit l'hyperboloïde osculateur d'une surface gauche dont les génératrices touchent la surface générale B aux points d'une courbe (B) et coupent, en outre, une courbe donnée (A). Ce problème a été traité par Ed. Weyr, J. Sobotka et B. Procházka. La solution de Ed. Weyr est incomplète.

L'auteur considère d'abord le cas spécial où B est un cône quadratique K^2, la courbe (B) une conique B^2 sur ce cône et la courbe directrice une droite A. En ce cas, la surface gauche en question est une surface biquadratique. Construction de l'hyperboloïde osculateur le long d'une génératrice arbitraire. Si l'on se donne, plus généralement, une courbe (A) au lieu d'une droite, on réduit le problème au précédent en considérant un faisceau de quadriques touchant la surface le long d'une génératrice. Si B est une surface générale, on remplace la développable tangente le long de (B) par le cône quadratique osculateur.