

# Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

---

## Úlohy

*Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, Vol. 1 (1872), No. 3, 148–160

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/123196>

## Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1872

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

# Úlohy.

## I. Z matematiky.

Řešení úlohy 1.

(Podává *Cel. Sommer*, technik.)

O trojúhelníkových úhlech platí

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma,$$

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2};$$

použijeme-li tedy vzorce

$$\sin \mu = 2 \sin \frac{\mu}{2} \cos \frac{\mu}{2},$$

obdržíme z prvního snadno

$$\frac{2 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \sin \beta \cos \beta + 2 \sin \gamma \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma} = 4$$

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \beta \sin \gamma} + \frac{\cos \beta}{\sin \gamma \sin \alpha} + \frac{\cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta} = 2,$$

a podobně druhého

$$\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} + \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} + \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}} = 2,$$

z čehož vyplývá stejnina v úloze vytknutá.

(Tutéž úlohu řešil způsobem opačným *Vojt. Kocourek*, žák VII. tř. č. gym. v Budějovicích.)

Řešení úlohy 2.

podali ještě v čas žáci VII. gym. *Al. Wolf* v Budějovicích a *Fr. Sýkora* v Praze (ústav Maade-ho).

Řešení úlohy 4.

(Podává *V. Kocourek*).

Položíme-li ve vzorci

$$-l(1-x) = l \frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

$$x = \frac{1}{2},$$

obdržíme stejninu v úloze vytknoutou.

(Podává *B. Sixta*, technik).

Jest-li všeobecněji

$$S = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{x^3}{3 \cdot 2^3} + \dots$$

bude pro  $x = 2y$

$$S = y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \dots$$

a tudíž, derivujeme-li podle  $y$ ,

$$\frac{dS}{dy} = 1 + y + y^2 + \dots + \frac{1}{1-y},$$

z čehož se obdrží integrováním

$$S = C - l(1-y) = C + l \frac{2}{1-x},$$

aneb poněvadž se obdrží pro  $x = 0$  jest;  $S = 0$  a tudíž i  $C = 0$ ,

$$S = l \frac{2}{2-x};$$

učiníme-li tu  $x = 1$ , zjednáme si konečně vzorec hledaný.

Řešení úlohy 5.

(Podává *Al. Strnad*, technik.)

Použijeme-li místo Krampova označení funkcí  $\Gamma$ , při čemž platí

$$z^{n,1} = (z+1)(z+2)\dots(z+n-1) = \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)}$$

a položíme-li dále

$$\frac{1}{z^{n+1,1}} + \frac{1}{(z+1)^{n+1,1}} + \frac{1}{(z+2)^{n+1,1}} + \dots = R$$

zjednáme si především

$$R = \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z+n+1)} + \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z+n+2)} + \frac{\Gamma(z+2)}{\Gamma(z+n+3)} + \dots,$$

což dle známého pravidla

$$\Gamma(a+n) = a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)\Gamma(a)$$

přetvoří se snadno v

$$R = \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z+n+1)} \left[ 1 + \frac{z}{z+n+1} + \frac{z(z+1)}{(z+n+1)(z+n+2)} + \dots \right].$$

Jmenujeme-li řadu v závorkách obsaženou  $S$ , použijme, abychom součet její ustanovili, známého vzorce

$$\int_0^1 x^m (1-x)^{p-1} dx = \frac{m}{m+p} \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{p-1} dx$$

a položíme zároveň

$$\int_0^1 x^{z-1} (1-x)^n dx = I,$$

načež podle něho postupně obdržíme

$$\int_0^1 x^z (1-x)^n dx = \frac{z}{z+n+1} I,$$

$$\int_0^1 x^{z+1} (1-x)^n dx = \frac{z(z+1)}{(z+n+1)(z+n+2)} I,$$

$$\vdots$$

a sečteme-li na obou stranách,

$$\int_0^1 x^{z-1} (1-x)^n (1+x+x^2+\dots) dx = \int_0^1 x^{z-1} (1-x)^{n-1} dx = SI,$$

čili dle známého \*) označení krátce

$$IS = B(z, n).$$

Poněvadž ale podle předcházejícího

$$I = B(z, n+1),$$

obdržíme, spojíme-li poslední dvě rovnice,

$$S = \frac{B(z, n)}{B(z, n+1)}$$

a za tou příčinou konečně

$$R = \frac{\Gamma(z) B(z, n)}{\Gamma(z+n+1) B(z, n+1)}.$$

Nahradíme-li pak ve výrazu posledním funkci  $B$  funkcí  $\Gamma$  dle vzorce

\*) Srovnej *Studnička* „Základové vyšší matematiky“ Díl II. pag. 92.

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

obdržíme, zároveň používající vzorce

$$\Gamma(n+1) = \Gamma(n),$$

$$R = \frac{\Gamma(z)}{n \Gamma(z+n)}.$$

Avšak dle první stejniny jest

$$\frac{\Gamma(z)}{n \Gamma(z+n)} = \frac{1}{z^{n,1}} = R,$$

čímž úkol předložený jest řešen.

Poznámka redakce. Použijeme-li stejniny

$$a_1 = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + \dots$$

a položíme-li

$$a_k = \frac{1}{(z+k-1)(z+k) \dots (z+k+n-2)},$$

$$\text{tedy } a_{k+1} = \frac{1}{(z+k)(z+k+1) \dots (z+k+n-1)},$$

obdržíme snadno

$$a_1 = \frac{1}{z(z+1) \dots (z+n-1)} = \frac{1}{z^{n,1}},$$

$$a_k - a_{k+1} = \frac{n}{z(z+k-1)(z+k) \dots (z+k+n-1)} = \frac{n}{(z+k-1)^{n+1,1}},$$

z čehož je pro  $k = 1, 2, 3 \dots$

$$a_1 - a_2 = \frac{n}{z^{n+1,1}},$$

$$a_2 - a_3 = \frac{n}{(z+1)^{n+1,1}},$$

$$a_3 - a_4 = \frac{n}{(z+2)^{n+1,1}},$$

⋮  
⋮  
⋮

načež dosazením těchto hodnot do první stejniny povstane vzorec v úloze předložený.

Řešení úlohy 6.

(Podává *Ed. Weyr.*)

Aby se předložená úloha řešila, postačí znáti poučku tuto:

„Jsou-li  $pp'$ ,  $qq'$ ,  $rr'$  body, z nichž kuželosečka tři po sobě jdoucí strany  $ab$ ,  $bc$ ,  $ca$  trojúhelníka  $abc$  protíná, jest vždy

$$\frac{ap}{bp} \cdot \frac{ap'}{bp'} \cdot \frac{bq}{cq} \cdot \frac{bq'}{cq'} \cdot \frac{cr}{ar} \cdot \frac{cr'}{ar'} = 1$$

a naopak.“

Důkaz této poučky \*) jest velmi jednoduchý, neboť jest dle známé věty její platnost pro kruh patrna a mimo to není nsnadno dokázati, že levá strana napsané rovnice se promítáním nikterak nemění. \*\*) Znajíce tuto větu, jest správnost naší úlohy patrna; neboť z podobností trojúhelníků vzniklých vedením tří rovnoběžek vysvitá, že oněch 6 průsečíků skutečně vyhovuje oné podmíněné rovnici.

Takto dokázanou větu můžeme též snadno rozšířiti. Protneme-li totiž strany  $ab$ ,  $bc$ ,  $ca$  libovolnou přímkou v bodech 1, 2, 3 a spojíme-li tyto body s libovolným bodem  $o$ , obdržíme 3 nové přímky protínající strany trojúhelníku ještě v 6 bodech; body tyto jsou v kuželosečce.

Dle poučky *Menelaovy* jest totiž

$$\frac{a1}{b1} \cdot \frac{b2}{c2} \cdot \frac{c3}{a3} = 1.$$

Protneme-li pak 01 strany  $\overline{bc}$  a  $\overline{ca}$  v bodech  $q$  resp.  $r$

„ „ 02 „  $\overline{ab}$  a  $\overline{ca}$  „  $p$  „  $r'$

„ „ 03 „  $\overline{ab}$  a  $\overline{bo}$  „  $p'$  „  $q'$ ,

bude patrně vždy dle poučky *Menelaovy*:

$$\frac{a1}{b1} \cdot \frac{bq}{cq} \cdot \frac{cr}{ar} = 1,$$

$$\frac{ap}{bp} \cdot \frac{b2}{c2} \cdot \frac{cr'}{ar'} = 1,$$

$$\frac{ap'}{bp'} \cdot \frac{bq'}{cq'} \cdot \frac{c3}{a3} = 1.$$

\*) *Poncelet* poukazuje ve svém „*Traité des propr. proj. etc.*“ k důležitosti tohoto theoremu, tvrdě, že lze na jeho základě snadno vyvoditi ostatní charakteristické vlastnosti všech kuželoseček. Viz. pag 18, díl I., 2. vydání.

\*\*) Viz „*Základové vyšší geometrie*, Živa 1871“ str. 16, kdež postačí použítí relace  $\frac{\gamma}{\gamma} = \frac{ta}{tb} \cdot \frac{tb'}{ta'}$ .

Násobíme-li a vyloučíme-li součin  $\frac{a1}{b1} \cdot \frac{b2}{c2} \cdot \frac{c3}{a3} = 1$ , obdržíme rovnici dokazující právě udanou poučku.

(Jiný způsob řešení podáme budoucně)

Řešení úlohy 7.

(Podává *K. Zahradník*.)

Prodloužíme-li protilehlé dvě strany čtyřúhelníku  $ABCD$  \*), na př.  $AB = a$ ,  $CD = c$ , až se protnou v bodu  $E$  a označíme-li délky  $BE = x$ ,  $CE = y$ , obdržíme dva podobné trojúhelníky  $ADE$  a  $BCE$ , o nichž platí

$$\frac{ADE}{BCE} = \frac{d^2}{b^2}, \quad (1)$$

$$\frac{d}{b} = \frac{c+y}{x} = \frac{a+x}{y}, \quad (2)$$

načež plyne z rovnice (1)

$$\frac{ADE-BCE}{BCE} = \frac{ABCD}{BCE} = \frac{d^2-b^2}{b^2}, \quad (3)$$

a z rovnice (2)

$$x = b \frac{ad+bc}{d^2-b^2}, y = b \frac{ab+cd}{d^2-b^2}. \quad (4)$$

Poněvadž o ploše trojúhelníku platí

$$16 \overline{BCE}^2 = (x+y+b)(x+y-b)(x-y+b)(-x+y+b)$$

a v tomto případě pomocí vzorců (4) snadno se sestaví

$$x+y+b = b \frac{a+c+d-b}{d-b},$$

$$x+y-b = b \frac{a+b+c-d}{d-b},$$

$$x-y+b = b \frac{-a+b+c+d}{d+b},$$

$$-x+y+b = b \frac{a+b-c+d}{d+b},$$

obdržíme, znásobivše tyto 4 rovnice,

$$\overline{BCE}^2 = \frac{b^4}{(d^2-b^2)^2} (s-a)(s-b)(s-c)(s-d),$$

zavedeme-li zároveň označení

---

\*) Výkres si laskavý čtenář snadno sám učiní.

$$2s = a + b + c + d.$$

Vyloučíme-li tedy z rovnice (3) a (5)  $BCE$ , zjednáme si konečně pro plochu trojúhelníku vzorec

$$ABCD = V(s-a)(s-b)(s-c)(s-d),$$

jakž v úloze jest udáno. \*)

### Řešení úlohy 9.

(Podává *F. Till*, technik.)

Vedeme-li k bodu  $M^{**}$ ) paraboly tečnu a spustíme-li s nějakého bodu jejího  $T$  kolmou  $TP$  na průvodič  $MF$  a kolmou  $TS$  na přímku  $MN \perp$  stojící na ředitelce, bude

$$\triangle TSM \cong TPM$$

a tudíž

$$SM = PM;$$

poněvadž ale

$$NM = MF,$$

jest

$$PF = NS = TR.$$

Na základě této relace možná vysloviti pravidlo, podle něhož má se vésti tečna, takto:

S daného bodu spustí se kolmá na ředitelku, touto kolmicí co poloměrem opíše se z ohniska kruh a k němu vedou se tečny s daného bodu; bodem dotýčným jdoucí poloměry prodlouží se až k parabole, kdež naznačují body dotýčné.

(Tutéž úlohu řešil způsobem analytickým *Štejnár*, technik a *Fr. Sýkora*.)

### Řešení úlohy 10.

(Podává *Jan Flieder*, technik.)

Za míru křivosti nějaké křivky má se obrácená hodnota poloměru křivosti  $R$ , tedy

\*) Vzorec tento znal již *Brahmegupta*, matematik indický, jehož činnost připadá mezi VI. a VII. st. po Kr. Později uvádí jej *Bhascara Acharya* ze XII. st. o čtyřúhelníku libovolném. Též *Snellius* (1591 až 1626) připisuje si tento vzorec v komentáru ku spisu Ludolfa van Ceulena „De problematibus miscellaneis.“ Dvoje řešení podal *Filip Naude* v „Miscell. Berol. t. III. 1723, načež *Euler* (1707—1783) nový geometrický důkaz podal v „N. comm. Ac. Petrop. t. I. 1747 až 1748; tamtéž v t. x. 1792 uveřejnil i *Fuss* nový důkaz a od té doby objevuje se vzorec tento dosti zhusta i v lepších knihách učebních.

\*\*) Příslušný výkres snadno si každý sestojí, při čemž se jen připomíná, že máme na zřeteli bod, jest úsečka i pořadnice jest posít. a menší nežli u bodu  $M$ .



$$\frac{1}{R} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}};$$

podmínka pro maximum neb minimum jest pak

$$D_x\left(\frac{1}{R}\right) = 0$$

aneb

$$(1+y'^2)y''' = 3y'y''^2.$$

Z rovnice křivky jde ale

$$y' = \frac{2}{3} + \frac{3x^2}{a^2}, y'' = \frac{6x}{a^2}, y''' = \frac{6}{a^2},$$

čímž se poslední podmínka promění v

$$405x^4 + 72a^2x^2 - 13a^4 = 0,$$

kterážto rovnice má reálné kořeny

$$x = \pm \frac{a}{3};$$

k těmto dvěma úsečkám náleží pak co pořadnice

$$y = \pm \frac{19}{8}a.$$

Body křivky, jichž křivost může býti největší neb nejmenší, jsou tedy

$$M_1\left(\frac{9}{3}, \frac{7a}{27}\right), M_2\left(-\frac{a}{2}, -\frac{7a}{27}\right).$$

Který případ tu nastává, rozhodne označení  $D_x^2\left(\frac{1}{R}\right)$ ; dosadíme-li do tohoto výrazu příslušné hodnoty, poznáme, že jest pozitivní, za kteroužto příčinou platí *minimum*. Absolutní délka poloměru  $R$  jest tu  $a\sqrt{2}$ .

(Tytéž výsledky obdržel *J. Chvátla*, technik.)

Řešení úlohy 11.

(Podává *B. Sixta*, technik.)

Vyjádříme-li délku poloměru křivosti, tangenty a subtangenty známými vzorci, bude dle úlohy

$$\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''} : a = \frac{y}{y'} (1+y'^2)^{1/2} : \frac{y}{y'},$$

z čehož se obdrží co diferenciální rovnice hledané křivky

$$1 + y'^2 = ay' = a \frac{dy'}{dx};$$

integrujeme-li, obdržíme především

$$x = A + a \operatorname{arc} \operatorname{tg} y',$$

z čehož obrácením povstane

$$y' = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \frac{x - A}{a},$$

načež opětým integrováním se obdrží

$$y = B - a \operatorname{arccos} \frac{x - A}{a}$$

aneb

$$e^{\frac{y-B}{a}} \cos \frac{x-A}{a} = 1$$

co konečné rovnice hledané křivky, kteráž tu sluje *stejněpnutá řetěznice*.

(Tutéž úlohu správně řešil *K. Zahradník*, *J. Flieder* a *J. Chvála*, technické.)

Řešení úlohy 12.

(Podává *J. Veber*, technik.)

Soustava parabol ustanovena tu rovnici

$$y^2 = 2p x,$$

v níž  $p$  jest proměnný parametr, za kteroužto příčinou bude diferenciální rovnice hledané trajektorie

$$1 + \frac{y}{2x} \frac{dy}{dx} = 0,$$

z níž jde integrováním

$$x^2 + \frac{y^2}{2} = A,$$

kterážto rovnice značí elipsy homothetické, jichž poměr poloos značí

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(Tutéž úlohu řešili technické *J. Chvála*, *J. Flieder*, *Jos. Neumann*, *A. Strnad* a *Fr. Till*.)

Poznámka. Jinak pojal soustavu parabol daných *K. Zahradník*; rovnice její jest

$$(y - a)^2 = 2px,$$

kdež  $a$  značí parametr proměnný, načež se obdrží co diferenciální rovnice hledané trajektorie

$$1 + \sqrt{\frac{p}{2}} \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} = 0,$$

z níž jde integrováním

$$(y - c)^2 = \frac{8}{27p} x^3,$$

což jest rovnice paraboly semikubické čili Neilovy, která se nám též evolutou paraboly obecné býti jeví.

Řešení úlohy 14.

(Podává *Jos. Neumann*, technik.)

Rovnici předložené možná dáti tvar

$$\frac{y^{IV}}{y'''} = \frac{y''}{y'},$$

načež se integrováním obdrží

$$y''' - c_1 y' = 0,$$

kterážto zkrácená lineární rovnice se stálými koeficienty má integrál

$$y = C_2 + C_3 e^{x\sqrt{c_1}} + C_4 e^{-x\sqrt{c_1}},$$

(Tutéž úlohu řešili správně technické *A. Strnad*, *Fr. Podhajský*, *J. Flíeder* a *B. Sixta*.)\*)

Úloha 22.

Mají se zvoliti čtyry závaží tak, aby se jimi dalo vážit od 1 až do 40.

Úloha 23.

Dělíme-li nějaké číslo 3, 5 a 7, obdržíme co zbytek  $a$ ,  $b$  a  $b$ ; které číslo jest to?

Úloha 24.

Má se řetězovým zlomkem vyjádřiti poměr mezi délkou strany pravidelného sedmiúhelníku a poloměru opsaného kruhu.

Úloha 25.

Dva vrcholy trojúhelníku jsou body pevné, třetí probíhá přímkou; jaké jest geometrické místo těžiště a průsečíku výšek proměnlivého trojúhelníku tohoto?

Úloha 26.

Nechť se řeší tato úloha pro ten případ, že třetí vrchol probíhá kružnici.

---

\*) Řešení dalších úloh bude uveřejněno v sešitu IV.

## Úloha 27.

Má se určití hodnota neurčitého výrazu

$$\int \frac{x}{a + bx^2} l(\alpha + \beta e^x).$$

## Úloha 28.

Má se ustanoviti součet nekonečné řady

$$1 + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^6}{6!} + \frac{z^9}{9!} + \dots$$

## Úloha 29.

Má se určití obsah tělesa omezeného pozitivními částmi rovin souřadnicových a plochou, jejíž rovnice jest

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ax^2 + by^2 + cz^2)^2.$$

## Úloha 30.

Má se vyhledati křivka, o níž platí

$$R r_n = r^2,$$

značí-li  $r$  průvodiče,  $r_n$  průmět jeho na normálu a  $R$  poloměr křivosti.

## II. Z fyziky.

Ještě v čas zaslali

řešení úlohy 1., 2., 3. a 4.

*V. Kocourek* a *Al. Wolf*, žáci VII. tř. č. gym. v Budějovicích a *Steiner*, technik;

řešení úlohy 5.

*F. Steinar* a *Fr. Sýkora*.

Řešení úlohy 6.

Délka válce musí býti menší nežli 3·72".

(Správné řešení zaslal *Fr. Sýkora* a *F. Steinar*.)

Řešení úlohy 7.

zaslal v čas ještě *F. Sýkora*, *F. Stejnar* a *Al. Wolf*.

Řešení úlohy 8.

(Podává *Jarošlav Šimek*, žák VIII. tř. r. gym. Maadeho.)

Rychlost, kterou udělí kaule  $m$  sousední  $m'$ , jest

$$a_1 = \frac{2ma}{m + m'},$$

a kterou udělí  $m'$  na to kouli  $m''$ , podobně

$$a_2 = \frac{2ma_1}{m' + m''},$$

z čehož jde, vyloučíme-li  $a_1$ ,

$$a_2 = \frac{4mm'a}{(m+m')(m'+m'')}.$$

Aby bylo  $a_2$  maximum, musí býti výraz

$$\left(\frac{m}{m'} + 1\right)(m' + m'')$$

minimum; derivujeme-li tedy podlé  $m'$ , obdržíme

$$-\frac{m}{m'^2}(m' + m'') + \frac{m}{m'} + 1 = 0,$$

z čehož se obdrží podmínka

$$m = \sqrt{mm''};$$

hmota prostřední koule musí tedy býti geometrickým průměrem mezi hmotou první a poslední.

(Správně řešení zaslal též *F. Stejnar.*)

#### Řešení úlohy 16.

Výslednice  $R. = 14.176$  a úhly, jež uzavírá se směrem jednotlivých sil,  $\alpha = 35^\circ 47'$ ,  $\beta = 66^\circ 24' 40''$ ,  $\gamma = 64^\circ 45' 54'' 5$

(Správně řešení zaslali *F. Čecháč*, žák VII. tř. r. gym. v Praze, *Fr. Sýkora*, *V. Kocourek*, *A. Wolf*, *T. Havlíček*, žák VIII. tř. č. gym. v Budějovicích.)

#### Řešení úlohy 18.

Poloměr zrcadla měří  $\frac{4}{3}m$ .

(Správně řešení zaslal *V. Kocourek*, *A. Wolf*, *F. Sýkora*, *F. Čecháč*, *T. Havlíček*, *K. Jakubec*, žák VIII. tř. č. gym. v Budějovicích a *A. Sucharda*, ž. VI. tř. r. v K. Hoře.)

#### Úloha 22.

Kolem válce délky  $l$  a tloušťky  $2r = 1^m$ , zhotoveného z dřeva lípového hutnosti 0.6 má se těsně ovinouti zinkový povlak; jak tlustý musí býti, aby hutnost spojených hmot byla 3, značí-li hutnost zinku 7.19.

#### Úloha 23.

Kam se má na trojúhelníkovou desku postavit závaží  $P$ , aby v rozích nesoucí dělníci nesli v poměru  $p : q : r$ .

## Úloha 24.

V jakém úhlu musí se vrhnouti danou rychlostí *v* hmotný bod, aby parabola jeho dráhy měla plochu co možná největší.

## Úloha 25.

Nit absolutně ohebná jest zavěšena ve dvou stejně vysoko položených bodech; jak musí se měniti od bodu k bodu průřez její, má-li v stavu rovnováhy míti tvar polokruhu. (Jedině přitažnost zemská působí tu na ni.)

## Úloha 26.

V jaké době spadne hmotný bod s výšky  $a$  k středu přitažnosti, řídící se do vzdálenosti obráceným poměrem kubickým.

---