Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Vavřinec Jelínek

O kutálejícím se kuželi

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 25 (1896), No. 2, 149--151

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123313`

$$y = \frac{20}{z} = 4 \quad \text{a} \quad x = \frac{15}{z} = 3,$$

čímž platnost požadavku zřejmá.

O kutálejícím se kuželi.

Podává

Vavřinec Jelínek,
professor v Novém Městě u Vídně.

1. Úplný přímý kužel o kruhové půdici p opisuje, kutálí-li se svým pláštěm P po rovině, plochu K kruhu o poloměru rovném straně s svého pláště.

Zdvojmocníme-li výraz pro plášť tohoto kužele

$$P^2 = r^2 s^2 \pi^2 = r^2 \pi \,.\, s^2 \pi = pK,$$

obdržíme tento vztah mezi týmiž plochami

$$P = \sqrt{pK}.$$

2. Kutálející se přímý kužel komolý opisuje svým pláštěm P mezikruží o ploše M. Znamenají-li ϱ_1 a ϱ_2 poloměry tohoto mezikruží, R a r poloměry kužele a D rozdíl obou půdic, pak $s = \varrho_1 - \varrho_2$ stranu pláště této komole, jest

$$\begin{aligned} M &= (\varrho_1 + \varrho_2)(\varrho_1 - \varrho_2)\,\pi, \\ D &= (R + r)(R - r)\,\pi, \\ P &= (R + r)(\varrho_1 - \varrho_2)\,\pi. \end{aligned}$$

Součinem obou prvních rovnic nabudeme

$$DM = (R + r)(R - r)(\varrho_1 + \varrho_2)(\varrho_1 - \varrho_2)\,\pi^2.$$

Pohybem kužele odůvodněna jest úměra

$$2\varrho_1\pi : 2\varrho_2\pi = 2R\pi : 2r\pi$$

čili

$$\varrho_1 : \varrho_2 = R : r,$$

tedy také

$$(\varrho_1 + \varrho_2) : (\varrho_1 - \varrho_2) = (R + r) : (R - r),$$

z níž následuje

$$(\varrho_1 + \varrho_2)(R - r) = (R + r)(\varrho_1 - \varrho_2).$$

Dosadíme-li ż této rovnice do horního součinu, obdržíme

$$DM = [(R + r)(\varrho_1 - \varrho_2)\,\pi]^2 = P^2,$$

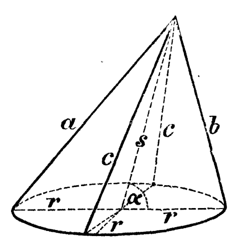
tudíž

$$P = \sqrt{DM}.$$

Dáme-li poloměr v menší půdici komole $r = o$, promění se komole v úplný kužel, rozdíl D půdic přejde pak v půdici p a mezikruží M vycelí se na úplný kruh K, takže shledáme, že v poslední rovnici obsažen jest i prvý případ.

3. Je-li kutálející se úplný kužel šikmým, vpadá mezní bod nejdelší strany a na obvod zevní kružnice, a mezní bod nejkratší strany b jeho pláště na obvod vnitřní kružnice mezikruží, v jehož středu zůstává vrchol kužele. Mezi ostatními stranami kužele vyniká pak strana c, která půlí středový úhel pláště, sevřený nejdelší a nejkratší jeho stranou, tím, že za pohybu kužele její mezní bod vpadá na obvod kružnice, která půlí plochu mezi oběma prvními kružnicemi. Délka c této strany nezávisí ni na poloměru ni na výšce kužele, nýbrž jest dána toliko stranami a a b; najdeme ji takto:

Protneme-li kužel rovinou, procházející vrcholem pláště i středem půdice a stojící kolmo na rovině obou stran a a b, protneme takto rovinu mezi a a b v ose s, půdici kužele v průměru $2r$ a plášť jeho ve stranách c.



Svírá-li s s půdicí kužele úhel α, jest dle věty Carnotovy

$$a^2 = r^2 + s^2 + 2rs\cos\alpha = c^2 + 2rs\cos\alpha,$$
$$b^2 = r^2 + s^2 - 2rs\cos\alpha = c^2 - 2rs\cos\alpha.$$

Ze součtu těchto rovnic vychází

$$c = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}},$$

kteroužto přímku snadno sestrojíme, změníce výraz pro ni na

$$c = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}.$$

Konečně shledáme, že mezikruží m, omezené kružnicemi o poloměrech a a c

$$m = \left(a^2 - \frac{a^2 + b^2}{2}\right)\pi = \frac{1}{2}(a^2 - b^2)\pi,$$

jest polovicí mezikruží omezeného kružnicemi o poloměrech a a b.

O komoli jehlanu.

Podává

Vavřinec Jelínek,
professor v Novém Městě u Vídně.

Komoli trojbokého jehlanu o rovnoběžných půdicích

$$P = ABC, \quad p = DEF$$

a výšce v rozložme dle obr. 1. na jehlany

$$ABCD = \frac{v}{3} . P,$$
$$BCDE = x,$$
$$DEFC = \frac{v}{3} . p.$$

Dáme-li vrcholy prvních dvou jehlanů do C, budou se míti jejich půdice $ABD : BDE = a : a'$, tedy také

$$(1) \qquad \frac{v}{3} P : x = a : a'.$$