

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Eduard Weyr

O kuželi druhého stupně

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 1 (1872), No. 1, 31–32

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/123416>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1872

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

v pólu nachází, a sestrojme na jejím povrchu obdélník $M'ON'P'$; přibývá-li veličiny φ o $d\varphi$, opisuje poloměr r na povrchu naší koule oblouk $p' = rd\varphi$, mění-li se však ω o $d\omega$, opisuje r oblouk $q' = r \sin \varphi d\omega$; položíme-li nyní skrze pól a skrze strany obdélníku $M'ON'P'$ čtyry roviny vytínající na povrchu plochy opět část $MONP = dP$, najdeme, poněvadž

$$p = \frac{\partial r}{\partial \varphi} d\varphi, q = \frac{\partial r}{\partial \omega} d\omega,$$

podlé (1)

$$dP = r \sqrt{\left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi} \right)^2 \right] \sin^2 \varphi + \left(\frac{\partial r}{\partial \omega} \right)^2} d\varphi d\omega *).$$

O kuželi druhého stupně.

(Poučka od Ed. Weyra.)

Každá z tří hlavních rovin kužele druhého stupně protíná jej ve dvou hranách, jež uzavírají úhel φ ; jsou-li φ_1, φ_2 a φ_3 hodnoty tohoto úhlu vzhledem k řečeným třem rovinám, platí o nich

$$\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 + \cos \varphi_3 \cos \varphi_1 + 1 = 0.$$

Důkaz. Zvolíme-li osy kužele za osy souřadnic x, y, z , jest rovnice jeho, jak známo,

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0;$$

položíme-li tu

$$x = 0, \text{ bude } by^2 + cz^2 = 0,$$

$$y = 0, \text{ „ } ax^2 + cz^2 = 0,$$

$$z = 0, \text{ „ } ax^2 + by^2 = 0,$$

kteréžto rovnice představují řečené hrany průsečné.

*) Vzorec poslední byl poprvé podán *Eulerem*; jenž jej však zavedením nových proměnných ze vzorce (2) obdržel. Bezprostřední vyvinut uveřejnil *Grunert* v díle svém „Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes für polare Coordinatensysteme“ p. 267 a v elegantnější formě *Unferdinger* v pojednání „Ableitung der Complanaformel in Polarcoordinaten aus der Figur“ *Grunerts Arch.* T. 48 p. 106.

Odvozování zde podané vysvětluje geometrický význam každého členu pod znamením odmocniny a nedá se snadně stručnějším nahraditi.

Poněvadž osy souřadnicové půlí úhly φ , jde z těchto rovnic

$$tg^{2\frac{1}{2}}\varphi_1 = -\frac{b}{c}, tg^{2\frac{1}{2}}\varphi_2 = -\frac{c}{a}, tg^{2\frac{1}{2}}\varphi_3 = -\frac{a}{b},$$

z kterýchžto vzorců znásobením se obdrží především

$$tg^{2\frac{1}{2}}\varphi_1 tg^{2\frac{1}{2}}\varphi_2 tg^{2\frac{1}{2}}\varphi_3 + 1 = 0$$

aneb

$$\sin^{2\frac{1}{2}}\varphi_1 \sin^{2\frac{1}{2}}\varphi_2 \sin^{2\frac{1}{2}}\varphi_3 + \cos^{2\frac{1}{2}}\varphi_1 \cos^{2\frac{1}{2}}\varphi_2 \cos^{2\frac{1}{2}}\varphi_3 = 0;$$

použijeme-li pak známých vzorců goniometrických, abychom vyjádřili \sin a \cos polovičních úhlů \cos celých, zjednáme si snadno
 $(1 - \cos \varphi_1)(1 - \cos \varphi_2)(1 - \cos \varphi_3) + (1 + \cos \varphi_1)(1 + \cos \varphi_2)(1 + \cos \varphi_3) = 0$
 aneb znásobíme-li, konečně

$$\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 + \cos \varphi_3 \cos \varphi_1 + 1 = 0,$$

což mělo býti dokázáno. *)

O přidružených zlomcích přibližných a jich upotřebení.

(Podává dr. F. J. Studnička.)

Ustanovíme-li k řetězovému zlomku

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots)$$

podle známých pravidel zlomky přibližné a značí-li

$$\frac{\alpha_{n-1}}{\beta_{n-1}}, \frac{\alpha_{n+1}}{\beta_{n+1}}$$

dva krajní ze tří po sobě jdoucích, vyjádří se celá řada mezi ně připadajících zlomků přidružených vzorcem

$$\frac{r_k}{s_k} = \frac{\alpha_n k + \alpha_{n-1}}{\beta_n k + \beta_{n-1}},$$

zavede-li se do něho za k po sobě

$$0, 1, 2, \dots, a_{n+1}-1, a_{n+1},$$

kdež značí a_{n+1} článkového dělitele, který vede k druhému z vytknutých zlomků.

Jelikož tu, jak známo,

$$r_k = \alpha_n k + \alpha_{n-1}, \quad (1)$$

$$s_k = \beta_n k + \beta_{n-1}, \quad (2)$$

*) Jedna z hodnot $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ jest patrně vždy ideální.