

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Úlohy

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 1 (1872), No. 1, 40–44

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/123419>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1872

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

Úlohy.

I. Z matematiky.

Úloha 1.

Má se dokázati, že o úhlech trojúhelníkových α, β, γ platí vzorec

$$\frac{\sin \frac{1}{2} \alpha}{\cos \frac{1}{2} \beta \cos \frac{1}{2} \gamma} + \frac{\sin \frac{1}{2} \beta}{\cos \frac{1}{2} \gamma \cos \frac{1}{2} \alpha} + \frac{\sin \frac{1}{2} \gamma}{\cos \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \beta} = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta \sin \gamma} + \frac{\cos \beta}{\sin \gamma \sin \alpha} + \frac{\cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

Úloha 2.

Jak velká jest plocha kruhu, ježž opisuje těžiisko trojúhelníku, jehož úhly měří $30^\circ, 45^\circ, 105^\circ$, otáčí-li se v kruhu poloměru 10 tak, že jednotlivé strany nepřestávají býti tětivami.

Úloha 3.

Má se dokázati a geometricky vyložiti, že

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \dots \text{in inf} = 2.$$

Úloha 4.

Má se odůvodniti vzorec tento:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \dots \text{in inf} = 12^*)$$

Úloha 5.

Má se dokázati, že

$$\frac{1}{n2^{n,1}} = \frac{1}{2^{n+1,1}} + \frac{1}{(2+1)^{n+1,1}} + \frac{1}{(2+2)^{n+1,1}} + \dots \text{in inf}.$$

Úloha 6.

Vedeme-li nějakým bodem v rovině rovnoběžky ku všem stranám trojúhelníku nějakého, obdržíme 6 průsečíků ležících v kuželosečce; kterých pouček tu k důkazu zapotřebí.

*) Jako ve všech spisech svých budu i zde užívati znamení l pro přirozený, lg pro brigický a Lga pro všeobecný logarithmus.

Úloha 7.

Značí-li a, b, c, d délky stran čtyřúhelníku do kruhu vepsaného a s poloviční jeho obvod, má se dokázati, že plochu vyjadřuje vzorec

$$p^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d).$$

Úloha 8.

Značí-li P prvočíslo, jest

$$\frac{(P-1)! + 1}{P} = m,$$

kdež m představuje číslo celistvé; jaký tu důkaz?

Úloha 9.

Má se u paraboly dokázati, že pata kolmice spuštěné s nějakého bodu T tečny její na průvodiče bodu dotýčného jest tak daleko vzdálená od ohniska jako T od ředitelky; na této vlastnosti budiž pak založeno pravidlo, podle něhož možná sestrojiti tečnu k parabole s bodu mimoležícího.

Úloha 10.

V kterých bodech křivky vyjádřené rovnicí

$$y = x \left(\frac{2}{3} + \frac{x^2}{a^2} \right)$$

jest křivost největší neb nejmenší, maximum neb minimum?

Úloha 11.

Má se vyhledati křivka, u níž se má délka poloměru křivosti k dané délce a jako délka tangenty k délce subtangenty.

Úloha 12.

Má se určiti orthogonální trajektorie soustavy parabol, majících společnou tečnu vrcholovou.

Úloha 13.

Má se dokázati, že cissoida jest trochoidou ohniska paraboly, valící se na stejné a stejně položené parabole.

Úloha 14.

Má se vyhledati taková funkce proměnné x , aby součin první derivace se čtvrtou rovnal se součinu druhé derivace s třetí.

Úloha 15.

Má se určiti a geometricky vyložiti integrál rovnice

$$(2y-3z) \frac{\partial z}{\partial x} + 2(2z-x) \frac{\partial z}{\partial y} = 3x-4y.$$

II. Z fyziky.

Úloha 1.

Desítiliberní koule železná leží mezi dvěma nakloněnými rovinami; jakou silou tlačí na jednotlivé roviny tyto, měřili naklonění jedné 30° , druhé 60° ?

Úloha 2.

Má se dokázati, že tři dělníci, držíce trojúhelníkovou stejnorodou desku stejně tloušťky v rozích, mají stejně co nésti.

Úloha 3.

Drží-li tutéž desku dva dělníci ve dvou rozích, kde na okraji musí držeti jiní dva dělníci, aby všickni nesli stejně.

Úloha 4.

Má-li deska taková tvar rovnoběžníku a drží-li ji dělník v jednom roze, kde musí jiní dva na okraji držeti, aby všickni nesli stejně?

Úloha 5.

Na vrchu výšky v pozoroval se meteor nějaký v úhlu α nad obzorem a jeho obraz v jezeru u paty vrchu se rozprostírajícím v úhlu β pod obzorem; jak vysoko byl meteor nad obzorem pozorovatele a jak vysoko nad hladinou jezera?

Úloha 6.

Na válec z tak zvané duše bezové poměrné tíže 0.1 zhotovený připojí se olověná polokoule poměrné tíže 11.5 téhož průměru 0.5" jako válec; jak dlouhý může býti, aby nezůstal na vodorovné rovině ležeti?

Úloha 7.

Jak musí býti nakloněna šikmá rovina, aby těleso na ní bez tření v témž čase sběhlo, jakéhož má zapotřebí, aby prostým pádem podél její výšky spadlo a nabytou dole rychlostí ještě délku základny proběhlo?

Úloha 8.

Tři zcela pružné koule m , m' a m'' stojí v přímém směru za sebou; jak velká musí býti hmota koule m' , aby přenesla na kouli m'' co možná největší rychlost, narazí-li na ni koule m rychlostí a . (Huyghens).

Poznámka. O zákonech rázu píše *M. Jullien* v „Problèmes de mécanique rationnelle“ t. I. pag. 253. mezi jiným

takto: „Le plus ancien ouvrage que nous connaissions sur le choc des corps est dû à J. *Marc Marci de Crownlad*, médecin hongrois (sic), qui publia à Prague, l' an 1639, un *Traité De proportionne motus seu regula sphygmica*, dans lequel il étudie le choc des corps dépourvus d'élasticité on parfaitement élastique. Les lois qu'il a données pour ces derniers corps sont précisément celles que l'on adopte aujourd'hui. Cet ouvrage remarquable est cependant tombé dans un oubli général; il paraît même qu'il ne parvint pas à la connaissance de Wallis, de Wren et de Huyghens qui, trente années plus tard, donnèrent à peu près les mêmes lois que Marci.“

Jak patrně, reklamuje Jullien prioritu pro *Marka Marci**), slavného rodáka našeho, ježž omylem má za uherského lékaře; neb obyčejně se připisuje vynalezení zákonů o rázu pružných koulí Huyghensovi.

Úloha 9.

Má se určití poloha těžiška u plochy, povstávající otočením polovičního oblouku kykloidy

$$x = a(1 - \cos \omega), y = a(\omega + \sin \omega)$$

kolem osy úseček.

Úloha 10.

Má se dokázati, že v neodporujícím ústředí proběhne hmotný bod oblouk lemniskaty v stejné době co příslušnou tětivu, počítáme-li obé od bodu středního.

Úloha 11.

Bod hmoty 1 pohybuje se, přitažností zemskou jsa puzen, na křivce, která se rychlostí ω otáčí kolem osy kolmé; jaké podmínce musí tato křivka vyhoviti, aby byl pohyb bodu stejnoměrný.

Úloha 12.

Na bod hmoty 1 působí z daného středu přitažná síla tak, že se pohybuje rychlostí přiměřenou obrácené n té mocnině vzdálenosti své od tohoto středu; jakým zákonem řídí se tu přitažnost a jaká tu povstává dráha vůbec a jestli $n = \frac{1}{2}$ a $n = 1$ zvlášť.

*) Nar. 13. června 1595 v Landškrone, zem. 10. dubna 1667 v Praze.

Úloha 13.

Na hmotný bod působí přítažná síla v opačně kubickém poměru z daného středu, kterýž jest obejmut hmotou plynnou, jíž ubývá hutnosti v kubickém poměru a jejíž odpor závisí na druhé mocnině rychlosti; jaká jest rychlost padajícího bodu v určité vzdálenosti od tohoto středu?

Úloha 14.

Jak by musila v předcházejícím případě působiti síla přítažná, aby bod padajíc potřeboval stejně dlouhého času pro kterou koli vzdálenost od středu?

Úloha 15.

Hmotný bod má dráhu tvaru logarithmické spirálky, působí-li naň přítažně pol její; má se určiti rychlost a síla přítažná v daném bodu dráhy.

Std.