

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Emil Weyr
O trojúhelnících kruhových

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 1 (1872), No. 1, 24–29

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/123425>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1872

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0 \quad (18)$$

nebo $a'b'c'' + b'c'a'' + ca'b'' = a'b'c'' + b'c'a'' + c'a'b''$, (19)
kteráž podmínka slove *pásmová rovnice*, pomocí níž se dá z polohy známých ploch ustanoviti poloha ploch neznámých.

(Pokračování.)

O trojúhelnících kruhových.

(Podává dr. Em. Weyr.)

1. Promítneme-li povrch koule z bodu povrchového O na rovinu R , která se koule dotýká v bodě O' bodu O protilehlém (tak že $\overline{OO'}$ jest průměr koule), obdržíme jak známo „*stereografické zobrazení*“ koule na rovinu R . Stereografická projekce uvádí rovinu R a kouli v následující souvislost: „Každému bodu P na povrchu koule se nalézajícímu (obr. 13.) přísluší bod P' co projekce, který lze obdržet co bod průsečný roviny R a paprsku OP .

Dva body protilehlé na povrchu koule ku př. P a Q přísluší bodům P' Q' roviny R , jejichž spojující přímka prochází bodem O' , při čemž zároveň stává rovnice

$$\overline{O'P'} \cdot \overline{O'Q'} = P^2,$$

je-li P průměr v úvahu vzaté koule.

Veškeré kruhy na povrchu koule se nalézající promítají se opět co kruhy. Hlavní kruh HH , jehož rovina rovnoběžná jest k rovině R , promítá se co kruh $H'H'$, jehož střed jest bod O' a jehož poloměr rovná se průměru P koule. Veškeré ostatní hlavní kruhy koule promítají se v kruzích, které protínají kruh $H'H'$ v bodech omezujících průměry tohoto kruhu, a každé dva z těchto kruhů protínají se opět v bodech, jež jsou obrazy protilehlých bodův základní koule.

Hodnoty úhlové se při projekci stereografické nemění, t. j. úhel, který vytvořen jest dvěma libovolnými kruhy na povrchu koule, rovná se úhlu vytvořenému příslušnými obrazy v rovině R .

2. Na základě všeobecně známých, právě blíže vytknutých vlastností stereografické projekce možná dokázat, že

„libovolné tři kruhy v rovině považovány býti mohou za stereografické obrazy tří hlavních kruhův koule.“

Budtež K_1, K_2, K_3 tři libovolně v rovině rozpoložené se vzájemně protínající kruhy (obr. 14.). Sestrojíme-li si společně tři tetivy těchto kruhů, pak se tyto jak známo protínají v témže bodě O' . Bodem O' v každém z tří kruhů prochází jediná nejmenší tetiva dotýčného kruhu a délky všech tří takto obdržených tetiv jsou sobě rovné a zároveň tyto tři tetivy rozpuhleny jsou bodem O' . Sestrojíme-li tudíž kruh $H'H'$, jehož průměr rovná se společné délce oněch tří nejmenších tetiv a jehož střed jest bod O' , pak kruh tento protne každým z daných tří kruhů K_1, K_2, K_3 v bodech omezujících průměry kruhu $H'H'$. Nyní sobě představme kouli, která se dotýká v bodě O' roviny R daných tří kruhů, jejíž průměr nechť se rovná poloměru kruhu $H'H'$. Promítneme-li kruhy K_1, K_2, K_3 z bodu O koule této, který jest protilehlý bodu O' , na povrch koule, tu obdržíme dle toho, co o stereografickém promítání řečeno bylo, na povrchu koule tři hlavní kruhy a můžeme tudíž skutečně libovolné tři kruhy v rovině považovati za stereografické průměty tří úplně určitých hlavních kruhů a taktéž i úplně určité koule. Koule ta jest pak reálná, protínají-li se veškeré tři dané kruhy K_1, K_2, K_3 v reálných bodech. V každém jiném případě (kde na př. dva z daných kruhů aneb nížádné dva nemají reálných bodův společných) stává se koule výše uvedená pomyslnou.

3. Budtež nyní v obr. 14. A_1, A_1' průseky kruhů K_2, K_3 , A_2, A_2' průseky kruhů K_1, K_3 a konečně A_3, A_3' průseky kruhů K_1, K_2 . Pak tvoří oblouky *arc* A_1, A_2 , *arc* A_2, A_3 , *arc* A_3, A_1 trojúhelník, jehož strany jsou části tří kruhů a jež nazýváti budeme „trojúhelníkem kruhovým“. Vrchole vytknutého trojúhelníku jsou body A_1, A_2, A_3 a tečny kruhů v těchto bodech svírají úhly, jež považovati budeme za úhly trojúhelníku kruhového. Strany pak jsou výše již vytknuté oblouky. Průseky A_1', A_2', A_3' tří upotřeбенých kruhů, které se mimo body A_1, A_2, A_3 vyskytují, nazveme těmito vrcholům „sdrúžené body“.

Každým vrcholem kruhového trojúhelníku a příslušným sdrúženým bodem prochází nekonečné množství kruhů tvořících

„svazek kruhový“. Kruhy takového svazku nazveme „*kruhy příčné*“ (transversálními).

O čtyřech kruzích téhož svazku, jejichž tečny v jednom (a pak i v druhém) z průsečných bodů tvoří svazek paprsků harmonických, pravíme, že tvoří svazek kruhů harmonických aneb že jsou harmonické. Co zvláštní případ kruhů harmonických podotkneme čtyry kruhy, z nichž dva rozpolují úhly povstávající průsekem druhých dvou kruhů.

4. Ku každému kruhovému trojúhelníku přísluší jistý kruh $H'H'$, pro kterýž jemu a kruhům K_1, K_2, K_3 společné tetivy jsou průměry. Střed O' tohoto kruhu jest průsečný bod přímek $A_1 A_1', A_2 A_2', A_3 A_3'$ a průměr jeho jest společná délka v kruzích K_1, K_2, K_3 bodem O' procházejících nejmenších tetiv.

Poněvadž, jak známo, můžeme trojúhelník kruhový určující tři kruhy považovat za stereografické projekce tří hlavních kruhův, při čemž kruh $H'H'$ jest obrazem hlavního kruhu koule, jehož rovina rovnoběžná jest k rovině obrazné (kterouž koule v bodu O' dotýká), tu patrno, že nejen veškeré kruhy příčné za obrazy hlavních kruhů koule považovati můžeme, alebž vůbec veškeré kruhy, které kruh $H'H'$ v diametrálně protilehlých bodech protínají. Dále bezprostředně vysvitá, že každé dvě takovýchto kruhů se protíná ve dvou bodech, jimiž proložené kruhy jsou obrazy hlavních kruhův koule.

Je-li pak QQ' pár průsečných bodův takovýchto kruhů (které jsou totiž obrazy hlavních kruhů koule), tu přímka QQ' , procházející musí bodem O' a zároveň stává rovnice

$$O'Q \cdot O'Q' = P^2$$

jest-li P poloměrem kruhu $H'H'$, který bychom „*hlavním kruhem*“ nazvati mohli.

5. Ze souvislosti, v kteréž se dle stereografické projekce povrch koule a rovina R nalézají, lze souditi, že každé poučce týkající se útvarů na povrchu koule odpovídati bude obdobná poučka pro rovinu R . Každému pak theoremu, jednajícímu o hlavních kruzích koule, odpovídati bude věta, jednající o kruzích, jenž protínají pevný kruh HH' v diametrálně protilehlých bodech. Každé poučce o trojúhelníku sferickém odpovídati bude obdobná poučka o trojúhelníku kruhovém v rovině R . Jelikož můžeme každé tři kruhy roviny R považovati za stereografické

projekce hlavních kruhů jisté koule, tuž patrně, že každý kruhový trojúhelník můžeme pojímati co stereografickou projekci jistého trojúhelníku sferického. Poněvadž jak známo stereografickou projekci hodnoty úhlové zůstanou nezměněny a tedy i taktéž dvojpoměr čtvero kruhů hlavních projekci touto se nemění, tuž čtenář snadno pochopí, že každé po levé straně se nalézající větě, již co známou předpokládáme a která se týká trojúhelníku sferického, odpovídá příslušná po pravé straně se nalézající, trojúhelníku kruhového se týkající věta. Hlavní kruh trojúhelníku kruhového označujeme, jako se již stalo $H'H'$.

6. „Hlavní kruhy koule rozpolující vnitřní úhly sferického trojúhelníku procházejí týmž bodem.“

„Dva hlavní kruhy koule rozpolující vnější dva úhly sferického trojúhelníku a hlavní kruh rozpolující třetí vnitřní úhel procházejí týmž bodem.“

„Příčné kruhy rozpolující vnitřní úhly kruhového trojúhelníku procházejí týmž bodem.“

„Dva příčné kruhy rozpolující vnější dva úhly kruhového trojúhelníku a příčný kruh rozpolující třetí vnitřní úhel procházejí týmž bodem.“

Poněvadž každé tři hlavní kruhy koule, procházející týmž bodem zároveň, současně procházejí bodem diametrálně protilehlým, tuž jasno, že i ve větách po pravé straně stojících obdržíme vždy tři kruhy, které současně procházejí dvěma body QQ' , které souvisí rovnici

$$\overline{O'Q} \cdot \overline{O'Q'} = P^2$$

při čemž přímka QQ' prochází středem O' hlavního kruhu dotýčeného kruhového trojúhelníku.

Sestrojíme-li veškeré hlavní kruhy koule rozpolující jak vnitřní tak i vnější úhly sferického trojúhelníku, tu patrně obdržíme šest takovýchto kruhů; a kruhy ty mají pak na kouli takové rozpoložení, že prochází čtyřikrát po třech dvěma protilehlými body. Pro náš trojúhelník kruhový můžeme tudíž vyslovit následující všeobecnou poučku.

„Sestrojíme-li v trojúhelníku kruhovém oněch šest kruhů příčných, které rozpolují vnitřní a vnější úhly, budou se kruhy ty čtyřikrát po třech protínati v týchž dvou bodech. Takto obdržíme čtyry páry průsečných bodů. Je-li QQ' jeden z těchto

párů, pak přímka $\overline{QQ'}$ prochází středem O' kruhu hlavního $H'H'$ a současně platí rovnice $\overline{O'Q} \cdot \overline{O'Q'} = P^2$.

7. „Hlavní kruhy koule proložené vrcholy sferického trojúhelníku a kolmo stojící na protilehlých stranách protínají se v témže bodě.“

„Příčné kruhy trojúhelníku kruhového, které kolmě protínají strany protilehlé vrcholům jimiž procházejí, protínají se v týchž dvou bodech.“

Rozumí se samo sebou, že hlavní kruhy koule procházející týmž bodem současně procházejí i bodem onomu diametrálně protilehlým.

8. „Hlavní kruhy koule rozpolující vnější úhly sferického trojúhelníku protínají protilehlé strany v bodech nacházejících se na témže kruhu hlavním.“

„Příčné kruhy trojúhelníku kruhového, jenž rozpolují vnější úhly, protínají protilehlé strany v bodech, kteréž se nacházejí na témže kruhu protínajícím hlavní kruh $H'H'$ v bodech diametrálně protilehlých.“

„Dva hlavní kruhy koule rozpolující dva vnitřní a hlavní kruh rozpolující třetí úhel vnější ve sferickém trojúhelníku protínají protilehlé strany v bodech na témže hlavním kruhu se nacházejících.“

„Dva příčné kruhy rozpolující dva vnitřní a příčný kruh rozpolující třetí vnější úhel v kruhovém trojúhelníku protínají protilehlé strany v bodech nacházejících se na témže kruhu, který hlavní kruh $H'H'$ v bodech diametrálně protilehlých protíná.“

9. Máme-li na povrchu koule dva body a, b , které ná určují jimi procházející hlavní kruh a tedy i jimi omezený oblouk $\text{arc } \overline{ab}$ a chceme-li sestrojiti bod r rozpolující tento oblouk, tu dostačí abychom sestrojili tečny oblouku v bodech a, b , které se nám v jistém bodě p — v pólu (ve smyslu geometrie rovinné a ne sférické) oblouku $\text{arc } \overline{ab}$ — protínají a spojíme-li nyní bod p se středobodem koule tu nám přímka, již takto obdržíme, protne oblouk $\text{arc } \overline{ab}$ v bodě r . Určíme-li stereografickou projekcí na rovinu R , pak se tečny hlavního kruhu promítnou co tečny příslušného kruhového obrazu a obraz bodu p bude tudíž pól jistého oblouku v rovině R . Přímka

pak, spojující středobod koule s pólem p , znázorní se nám co příčka procházející bodem O' , v kterémž rovina R koule se dotýká.

Považujeme-li tudíž kruhový trojúhelník $A_1 A_2 A_3$ za stereografický obraz sferického trojúhelníku, tu obdržíme body, které jsou obrazy bodů rozpolujících strany sferického trojúhelníku, promítneme-li póly oblouků $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $A_3 A_1$ (t. j. póly stran kruhového trojúhelníku) ze středu O' hlavního kruhu $H'H'$ na tytéž strany. Pro trojúhelník sferický platí jak známo následující po levé straně se nacházející poučka, z čehož dle předešlého plyne správnost i po pravé straně se nalézajícího theoremu;

„Hlavní kruhy koule, procházející vrcholy a středy protilehlých stran sferického trojúhelníku, protínají se v témže bodu“.

„Promítneme-li póly stran trojúhelníku kruhového na tytéž strany ze středu O' hlavního kruhu $H'H'$ a proložíme-li obdrženými body a protilehlými vrcholy příčné kruhy, protínají se kruhy tyto v témže bodu.“