

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Alois Strnad

Obecná poučka o funkcích

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 2 (1873), No. 2, 142–143

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/123470>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1873

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

Obecná poučka o funkcích.

(Podává A. Strnad, technik.)

V lonském ročníku časopisu „Nouvelles annales de mathématiques“ pag. 469 podává pan *Moret-Blanc* důkaz následujícího theoremu:

Budiž $f(x)$ libovolná, v mezích od a do x konečná a spojitá funkce. Mezi a a x vložme $(n-1)$ člen řady geometrické

$$a \sqrt[n]{\frac{x}{a}}, \quad a \sqrt[n]{\left(\frac{x}{a}\right)^2}, \quad \dots \quad a \sqrt[n]{\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}}$$

a označme Mg arithmetický průměr hodnot

$$f(a), f\left[a \sqrt[n]{\frac{x}{a}}\right], \dots, f\left[a \sqrt[n]{\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}}\right], f(x).$$

Dále vložme $(n-1)$ člen řady arithmetické

$$a + \frac{x-a}{n}, a + \frac{2(x-a)}{n}, \dots, a + (n-1) \frac{x-a}{n}$$

mezi a a x a budiž Ma arithmetický průměr hodnot

$$\frac{f(a)}{a}, \frac{f\left(a + \frac{x-a}{n}\right)}{a + \frac{x-a}{n}}, \dots, \frac{f\left(a + (n-1) \frac{x-a}{n}\right)}{a + (n-1) \frac{x-a}{n}}, \frac{f(x)}{x}$$

Pro $n = \infty$ jest pak

$$\lim \frac{Ma}{Mg} = \frac{l \frac{x}{a}}{x-a}.$$

kterýžto výraz nezávisí na tvaru funkce f .

Podáváme tuto důkaz jiný, kratší a jednodušší.

$$\text{Položme } \frac{x-a}{n} = \Delta x,$$

$$\frac{x-a}{n} \sum_{k=0}^n \frac{f\left(a + k \frac{x-a}{n}\right)}{a + k \frac{x-a}{n}} = \sum_{k=0}^n \frac{f(a + k \Delta x)}{a + k \Delta x} \Delta x = J,$$

dále

$$\frac{x}{a} = b, \quad \frac{1}{n} = \Delta_1 x,$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f(a \sqrt[n]{\left(\frac{x}{a}\right)^k}) = \sum_{k=0}^n f(ab^k \Delta_1 x) \Delta_1 x = J_1 ;$$

pak bude patrně

$$Ma = \frac{J}{(n+1) \Delta_1 x} = \frac{n J}{(n+1)(x-a)},$$

$$Mg = \frac{J_1}{(n+1) \Delta_1 x} = \frac{n J_1}{n+1},$$

a tudíž dělíme-li,

$$\frac{Ma}{Mg} = \frac{J}{(x-a) J_1}.$$

Přejdeme-li k limitě pro $n = \infty$, obdržíme

$$\lim J = \int_a^x \frac{f(\xi)}{\xi} d\xi, \quad \lim J_1 = \int_0^1 f(-ab^\xi) d\xi$$

a zavedením nové proměnné $\eta = -ab^\xi$ do posledního integrálu,

$$\lim J_1 = \frac{1}{lb} \int_a^x \frac{f(\eta)}{\eta} d\eta.$$

Z toho následuje konečně

$$\lim \frac{Ma}{Mg} \lim = \frac{J}{(x-a) J_1} = \frac{lb \int_a^x \frac{f(\xi)}{\xi} d\xi}{(x-a) \int_a^x \frac{f(\eta)}{\eta} d\eta} = \frac{lb \frac{x}{a}}{x-a},$$

což bylo dokázati.
