Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Vladimír Václav Heinrich

Sur une forme normale des solutions périodiques et des solutions séculaires

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 6, 226--229

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123562`

lassen sich in Polarkoordinaten durch die folgenden Beziehungen darstellen: Verschiebungen:

$$u_r = \frac{\partial \chi}{\partial r} + 2r\Phi, \qquad u_\vartheta = \frac{1}{r}\frac{\partial \chi}{\partial \vartheta}.$$

Spannungen:

$$
\begin{aligned}
\frac{1+\nu}{E}\widehat{rr} &= \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \frac{2-\nu}{1-\nu}\frac{\partial r\Phi}{\partial r}, \\
\frac{1+\nu}{E}\widehat{r\vartheta} &= \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial \chi}{\partial r} - \frac{\chi}{r^2} + \Phi\right], \qquad (1) \\
\frac{1+\nu}{E}\widehat{\vartheta\vartheta} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \chi}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial r\Phi}{\partial r} + 2\Phi, \\
\frac{1+\nu}{E}\widehat{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial \chi}{\partial \vartheta}\operatorname{cotg}\vartheta + \frac{1}{r}\frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial r\Phi}{\partial r} + 2\Phi,
\end{aligned}
$$

worin die Funktionen $\Phi(r, \vartheta)$ und $\chi(r, \vartheta)$ den Gleichungen

$$\nabla^2\Phi = 0, \quad \nabla^2\chi = -\frac{1}{1-\nu}\frac{\partial r\Phi}{\partial r} - 4\Phi, \quad (\nabla^4\chi = 0) \qquad (2)$$

genügen müssen. (E = Elast.-modul, ν = Poissonsche Konstante). Für Belastungsfälle, bei welchen sich die Belastung durch die Kugelfunktionen erster Art $P_\alpha(\vartheta)$ (α ganze Zahl) ausdrücken läßt, erhält man die vollständige Lösung des Problems, wenn man zur bekannten periodischen Lösung von Gl. (2) $\chi = \sum_{\alpha=0}^{\infty} R_\alpha(r)P_\alpha(\vartheta)$ die „hemisphärische“ Lösung $\overline{\chi} = \lim_{\alpha=1} \frac{\partial}{\partial \alpha}(r^\alpha P_\alpha)$ addiert. (Hampl, Monatshefte f. Math. u. Ph., 1930, S. 215). Die Auflagerbedingungen kann man mit Hilfe der Funktionen $P_\alpha(\vartheta)$ erfüllen, wobei α einer transzendenten Gleichung genügen muß.

Sur une forme normale des solutions périodiques et des solutions séculaires.

Wladimir Wáclav Heinrich, Praha.

Je vais Vous présenter un segment particulier de mes travaux, pendant les années toutes récentes. Le but principal est de fonder une nouvelle théorie du système planétaire en particulier et des systèmes stéllaires en général.

Les efforts des épigones des classiques tels que Gyldén, Newcomb, Lindstedt ont abouti vers le déclin du siècle dernier à la découverte sensationnelle de Henry Poincaré.

L'illustre géomètre avait démontré que les séries trigonométriques Fourier-Weierstraß qui résolvent le problème planétairesont essentielment divergentes. Par conséquent elles ne disent rien de l'avenir lointain ni de l'histoire du système solaire. C'est dire qu'au point de vue de la cosmogonie et l'évolution de telles systèmes elles n'apportent presque rien.

La seule brèche qui mène aux séries absolument et uniformément convergentes est l'idée des solutions périodiques de Hill et Poincaré. Malheureusement le nombre des ces exactes solutions qu'on pourrait en même temps employer dans la pratique, n'est que très limité.

Donc dès le commencement de mes propres études j'ai toujours vu le but principal, le plus moderne, sinon l'avenir entier de la mécanique céleste dans la découverte et la recherche d'un plus grand nombre de ces solutions.

C'est ainsi que j'ai ajouté à l'idée des solutions périodiques — l'idée des solutions séculaires.

Or il est difficile de décrire les calculs pénibles au prix desquels ces solutions étaient accessibles encore il y a quelques années auparavant. Je mentionne la méthode classique de Delaunay. Ce n'est au fond qu'une variation pénible des arbitraires à la Lagrange. C'est une machine aux rouages savamment combinés qui procède à broyer les obstacles fragment par fragment (Tisserand). Le savant géomètre français n'a pas hésité d'effectuer 498 de telles opérations pendant un délai de 20 ans.

J'ajoute la méthode ingénieuse de M. F. Baker exécutée par le jeune mathématicien Japonnais Hagihara. — Comme les résultats restaient toujours presque inabordables nous le voyons d'après le travail des plusieurs mathématiciens, qui en passant en revue toutes les possibilités de la litérature parlent des limites de la science causées par l'état présent de l'analyse. —

Or il n'y a pas à désespérer. Il y a quelque années auparavant je me suis permis d'appeler l'attention des géomètres à une substitution infinitésimale, dont la grande portée, ainsi que l'interprétation mécanique était restée incomprise.[1])

Au moyen de cette substitution simple j'ai réussi à augmenter enormément le nombre des solutions exactes du problème des trois corps. Et il ne s'agissait ensuite que de faire plus accessibles ces sortes de développements. Dans ce but j'ai inventé pendant les années suivantes trois sortes d'opérations: La méthode de faux

[1]) W. W. H. Nouvelles classes des solutions séculaires du problème général des trois corps. 1922. Publications de l'Institut astronomique de l'Université Charles. Série II, Nro 1. Publications de la Faculté des sciences de l'Université Charles. Prague 1922.

W. W. H. Sur une méthode pour étudier les trajectoires séculaires du problème de n corps. Publications de l'Institut astron. Série II, Nro 4. 1924.

mouvements moyens, la méthode des impulsions séculaires et une méthode troisième.

Donc après avoir approché les solutions séculaires à notre connaissance — un nombre des questions se pose:

Comment étudier leur voisinage — comment prolonger les périodes etc.

J'ai choisi pour aujourd'hui le problème suivant:[2])

J'envisage le cas très étendu des équations du mouvement de Lagrange ou de Hamilton Jacobi, où l'on réussit à intégrer partiellement le problème du mouvement au moyen des séries trigonométriques de Weierstraß à plusieurs arguments. On peut donner les résultats en forme des deux théorèmes dont les notions principales remontent à Delaunay et Paul Epstein. On peut remplacer par les dites théorèmes les théories bien connues de Hamilton, Liouville et Stäckel. Au moyen de ces théorèmes on peut toujours définir les nouveaux éléments canoniques appropriés. L'avantage mémorable consiste en un raccourcissement énorme des calculs et en une quasiautomatique interprétation géométrique des constantes.

Dans le cas particulier d'une solution périodique on peut définir ses éléments normaux. On pourrait appeler ces coordonnées, les éléments séculaires ou moyens. Ils permettent d'attaquer le problème de voisinage analytique de l'orbite périodique quelconque ou de l'orbite séculaire au moyen des mêmes méthodes qu'avait choisi H. Poincaré pour l'étude du voisinage des simples orbites Képlériennes.

Voici une autre manière d'expliquer la méthode.

Déjà Laplace fait une distinction précise entre l'étude d'équilibre autour d'une position fixe et l'étude de l'équilibre en mouvement. C'est ainsi qu'on parle des points représentatifs de l'équilibre, fixes et mobiles. Je vais appeler la solution en question la génératrice. Dans le cas de n degrés de liberté elle sera représentée par n points dans un plan, leur positions étant indiqués au moyen des coordonnées polaires. Le rayon vecteur est fixé par la coordonnée canonique, scalaire, l'angle polaire par la coordonnée angulaire correspondante.

Or je démontre en somme: La génératrice pourra toujours être réduite au cas très simple, où tous les points représentatifs se meuvent sur les circonférences des cercles (où même, où tous les points d'équilibre se réduisent à des positions fixes à l'exception du dernier qui se meut dans un cercle.)

[2]) W. W. H. Sur une méthode d'effectuer la variation des arbitraires et certaines coordonnées de la dynamique. Mémoires de la Société Royale des sciences de Bohême, 1934. Prague. Publications de l'Institut astronomique de l'université Charles. Série II, Nro 12.

Les éléments ainsi définis sont beaucoup plus simples et avantageux que les coordonnées normales bien connues de Poincaré qui ne sauraient être accessibles qu'au prix des calculs presque inextricables.

Sur les équations absolues du mouvement.

Z. Horák, Praha.

Dans le travail „Sur la dynamique absolue des systèmes rhéonomes"[1]) j'ai donné les équations dynamiques absolues, valables pour les paramètres espace-temporels. Dans cette communication, je vais déduire leur forme explicite, sans tenant compte du calcul différentiel absolu.

Le mouvement d'un système à n paramètres x^λ $(\lambda, \mu = 1, \ldots n)$ de l'énergie cinétique T, soumis à l'action de forces généralisées X_λ et aux liaisons non holonomes et rhéonomes[2])

$$\Phi_\lambda{}^K \, \mathrm{d}x^\lambda + \Phi_t{}^K \, \mathrm{d}t = 0 \quad (K = 1, \ldots n - m) \tag{1}$$

est déterminé moyennant les équations

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\lambda} - \partial_\lambda T = X_\lambda + \Lambda_K \Phi_\lambda{}^K. \tag{2}$$

Introduisons les $m + 1$ paramètres espace-temporels q^a — en général non holonomes — en posant

$$\mathrm{d}x^\lambda = B_a{}^\lambda \mathrm{d}q^a, \quad \mathrm{d}t = B_a{}^t \mathrm{d}q^a \quad (a, b = 0, 1, \ldots m) \tag{3}$$

sous réserve que les q^a sont indépendants de sorte que

$$\Phi_\lambda{}^K B_a{}^\lambda + \Phi_t{}^K B_a{}^t = 0. \tag{4}$$

En raison de (3), on obtient

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^a} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\lambda} \frac{\partial \dot{x}^\lambda}{\partial \dot{q}^a} = B_a{}^\lambda \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\lambda},$$

$$\partial_a T = B_a{}^\lambda \partial_\lambda T + \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\mu} \partial_a \dot{x}^\mu = B_a{}^\lambda \partial_\lambda T + \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\mu} \partial_a B_b{}^\mu \dot{q}^b.$$

Donc, en multipliant (2) par $B_a{}^\lambda$ et faisant la somme, nous aurons en vertu de (4)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^a} - \partial_a T + \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\mu} (\partial_a B_b{}^\mu - \partial_b B_a{}^\mu) \, \dot{q}^b = B_a{}^\lambda X_\lambda - \Lambda_K \Phi_t{}^K B_a{}^t.$$

---

[1]) Prace Mat.-Fiz., Warszawa, XLI (1933) p. 25—37.

[2]) Je me sers des notations $\partial_\lambda = \frac{\partial}{\partial x^\lambda}$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_a = \frac{\partial}{\partial q^a} = B_a{}^\lambda \partial_\lambda + B_a{}^t \partial_t$ et je supprime les chiffres de sommation.