Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Antonín Sucharda

Poznámka o jisté ploše mimosměrek čtvrtého stupně

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 24 (1895), No. 5, 286--290

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123851

*cartesova listu, příslušných dotyčným bodům rovnoběžných tečen daného listu, je dvojný bod tohoto listu.**)

Poznámka o jisté ploše mimosměrek čtvrtého stupně.

Napsal

Dr. Ant. Sucharda,
professor v Praze.

1. V rovině E dána ellipsa *E*, $\overline{ab}$ jest její průměr libovolný, $\overline{cd}$ průměr jemu sdružený, *s* jest středem ellipsy. V rovině E′ s rovinou E stejnosměrné jest ellipsa *E′*, *a′b′* její průměr libovolný, *c′d′* průměr jemu sdružený, *s′* její střed. Body *aa′ bb′ cc′ dd′ ss′* určeny jsou mimosměrky *A B C D S*.

Přímkami *A B* a rovinou E jako útvary řídícími určen jest hyperbolický paraboloid ¹H, k jehož površkám náleží přímky *ab a′b′*. Půlící body úseků površek mezi přímkami *A B* obsažených vyplňují přímku hyperbolickému paraboloidu náležitou. Poněvadž k těmto bodům náleží středy *s s′* ellips *E E′*, jest touto přímkou jejich spojnice *S*. Přímky *C D* určují s rovinou E jako útvary řídicí hyperbolický paraboloid ²H, jemuž přímky *cd c′d′* náleží jako površky druhé soustavy. Také zde půlící body příslušných úseků všech površek s rovinou E stejnosměrných vytvořují přímku, površku to druhé soustavy; poněvadž dvěma půlícími body i zde jsou středy *s s′*, jest touto přímkou zase přímka *S* těmi body určená. I jest patrno, že rovinami osnovy E protínají se přímky *A B C D* pokaždé ve čtyřech bodech, z nichž první dva určují jeden, druhé dva druhý z úseků, jež v bodě *s* vzájemně se protínají a půlí. Lze tedy míti každé takové čtyři body za konce dvou sdružených průměrů jediné ellipsy. Takto nabudeme nekonečně mnoha ellips v rovinách osnovy E, jejichž středů geometrickým místem jest přímka *S*. Geo-

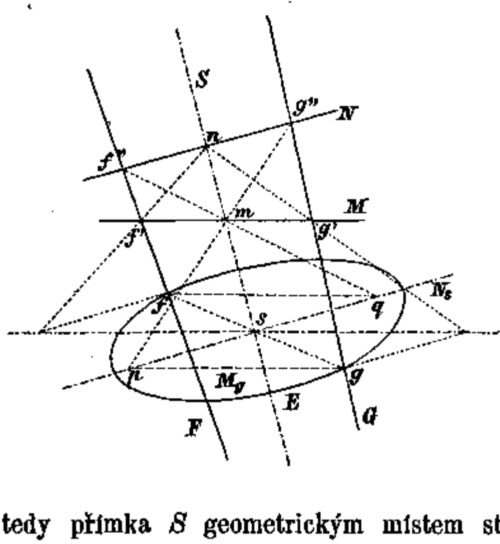
*) Viz: K. Zahradník: Vlastitost skupina sticišta na Descartesovu listu. Rad jugosl. akademije. Knjiga CIV. pg. 115.

metrickým místem všech těchto ellips jest kuželosečková plocha P, kterouž zevrubněji poznáme v řádcích následujících.

Víme, že průměry $\overline{{}^ia^ib}$ tvoří hyperbolický paraboloid ¹H o řídících přímkách A S, průměry $\overline{{}^ic^id}$ hyperbolický paraboloid ²H o řídících přímkách C S, řídící rovinou že jest v obou případech rovina E. Mají tedy oba paraboloidy společnou přímku S a úběžnou přímku roviny E, tudíž dvě površky jedné soustavy. Jak známo, musí se protínati ještě ve dvou přímkách soustavy druhé, tudíž ve dvou mimoběžkách s rovinou E stejnosměrných a ovšem i přímku S protínajících. To však jinak není možno, nežli že splyne po dvakráte průměr ab se sdruženým cd. Příslušná ellipsa stane se přímkou. Degeneruje tedy ellipsa v rovině osnovy E obsažená dvakráte v jedinou přímku dvojnou. Přímky ty, M, N jsou s rovinou E stejnosměrny, spolu mimosměrny a přímku S protínají.

2. Mysleme si nyní plochu mimosměrek Q určenou těmito dvěma mimosměrkami M N a ellipsou E, jejíž rovina E jest jak víme s nimi stejnosměrná. Příčka S obou mimosměrek, středem s ellipsy procházející, protínej prvou v bodě m, druhou v bodě n. Tato plocha mimosměrek jest stupně čtvrtého. Ze stejnosměrnosti přímek M N s rovinou E vyplývá, že nemůže míti v konečnu površek v rovině E obsažených. Má jedinou, osamělou, dvojnou površku $P\infty$, spojnici to úběžných bodů M, N a tudíž úběžnou přímku, společnou rovinám osnovy E. Z toho následuje, že tyto roviny každá protínají ji v konečnu v kuželosečce, tato pak, nemohouc míti realných bodů úběžných, *jest vždy ellipsou.*

Hledejme geometrické místo středů těchto ellips. Za tím účelem stanovme libovolným bodem g ellipsy E procházející površku plochy Q. (Viz připojený obrazec.) Bod g s přímkou M určuje rovinu F, jejíž stopou v rovině E jest přímka $Mg \parallel M$. Rovina G přímkami S, N určená, proniká se s rovinou E v přímce $Ns \parallel N$. Přímky Mg Ns protínají se v bodě p, přímka $\overline{pm}$ jest žádanou průsečnicí rovin F, G, pročež bod g'', v němž $\overline{pm}$ přímku N seče, s bodem g určuje hledanou površku plochy mimosměrek. Opětujíce konstrukci tu pro bod f, bodu g v ellipse E diametralně protilehlý, ihned poznáme, že bodu p odpovídá bod q s ním souměrný dle středu s, takže přímka $\overline{qm}$ protíná přímku N v bodě f', s bodem g'' dle středu n souměrném. Zaměníme-li M za N a naopak a opětujeme-li konstrukci předešlou, shledáme, že i body $g'f'$, v nichž površky $gg''\ ff''$ přímku N protínají, jsou dle středu m spolu souměrny. Poznáváme tedy: Libovolné površce G, body gg' určené, odpovídá vždy určitá površka F, body ff' určená, jež s ní a s S tvoří tři površky jedné soustavy hyperbolického paraboloidu, jehož řídící rovinou jest Ε a jehož površky druhé soustavy protínají se s oněmi třemi v bodech $'g\ 'f\ 's$, z nichž první dva jsou souměrny dle třetího, v přímce S obsaženého. Poněvadž $'g\,'f$ náleží ellipse E, obsažené v rovině osnovy Ε, musí tato křivka míti střed v přímce S.



Jest tedy přímka S geometrickým místem středů všech ellips, obsažených v rovinách osnovy Ε.

Volme nyní kterékoli dva sdružené poloprůměry $\overline{as}\ \overline{cs}$ ellipsy E. Bodem a prochází površka A, bodem c površka C plochy mimosměrek. Protněme plochu libovolnou rovinou $'$Ε osnovy Ε. Ta protíná A v bodě $'a$, C v bodě $'c$, S v bodě $'s$.

Dokážeme, že prvé dva jsou konci dvou sdružených poloprůměrů příslušné ellipsy, jejíž středem jest bod $'s$.

Tečny v bodech ${}^{i}c$ ku ellipsám v rovinách osnovy E ležícím vyplňují hyperbolický paraboloid ^{3}H, tvoříce jednu soustavu jeho površek. K té náleží též přímky M, N. Přímky ${}^{i}a\,{}^{i}s$ tvoří rovněž jednu soustavu površek jiného hyperbolického paraboloidu ^{4}H, a také k této náleží přímky M, N. Mají tedy tyto dva paraboloidy společných dvé přímek jedné soustavy a v rovině E ještě každý jednu ze dvou přímek k této soustavě náležejících a spolu stejnosměrných. Jde z toho, že oba paraboloidy mají ve třech bodech úběžné přímky roviny E, úběžných to bodech přímek M N a úběžném bodě stejnosměrek as, Tc společné roviny tečné. Z čehož následuje, že tyto paraboloidy i ve všech ostatních bodech té úběžné přímky mají společné tečné roviny, a proto proniká je každá rovina osnovy E ve dvou přímkách stejnosměrných. Poněvadž jedna z nich obsahuje poloprůměr as, druhá tečnu Tc, je tím dokázáno, ***že jsou body ${}^{i}a\,{}^{i}c$ konci párů sdružených průměrů příslušné ellipsy***, jak jsme tvrdili.

Poznámka. Rovina, která jde přímkami M, S, protíná plochu ve dvou površkách, podobně rovina přímkami N, S určená.

Z toho jde na jevo, že všecky ellipsy mají pár průměrů stejnosměrných, nejsou to však průměry sdružené. Volíme-li přímky M N tak, aby byly stejnosměrny s párem sdružených průměrů ellipsy E, budou všechny ellipsy míti pár sdružených průměrů stejnosměrných.

Zvláštním případem toho jest známá plocha normal přímého kužele elliptického podle ellipsy k ose kolmé.*) Při ní všechny ellipsy mají osy stejnosměrné.

3. Z vykonaných úvah vysvítá, že kuželosečková plocha P, počátkem tohoto článku uvedená, jest totožna s plochou mimosměrek Q čtvrtého stupně, určenou dvěma mimosměrkami M, N a ellipsou E v rovině s nimi stejnosměrné.

Lze tedy tuto plochu mimosměrek definovati též jako geometrické místo ellips v rovinách stejnosměrných, jejichž středy vyplňují určitou přímku S a konce dvou sdružených poloprůměrů dvě přímky A C mezi sebou i s přímkou S mimosměrné.

*) Sr. Šolín: Über die Normalenfläche zum dreiaxigen Ellipsoide längs einer Ellipse eines Hauptsystems. (Rozpravy kr. České Společnosti Nauk r. 1868.)

Je-li plocha tímto způsobem definována, žádáme-li si však sestrojiti její přímky povrchové, třeba jen uvážiti, že body $a^1a^2a\dots$ $a'^1a'^2a'\dots$ v nichž površky její s ellipsami E E' se pronikají, tvoří na těchto křivkách řady promětné, jak známo.*) Poněvadž pak v ellipse E máme body ab, cd, jimž v ellipse E' odpovídají body $a'b'$ $c'd'$, obdržíme ihned potřebné dva svazky promětné; volíme-li ku př. a a' za příslušné středy, budou to $a(c\,b\,d)\,\overline{\wedge}\,a'(c'\,b'\,d')$ a úkol ku bodu e nalézti příslušný e' snadně se rozřeší. Avšak též dvojné přímky M N této plochy, v konečnu obsažené, snadno obdržíme užitím promětností takto: Víme z předešlého, že jsou to dvě s rovinou E stejnosměrné společné površky hyperbolických paraboloidů ^{1}H ^{2}H. Každým bodem přímky S těmto paraboloidům společné prochází v každém z nich jedna površka s rovinou E stejnsoměrná, jež A a C v určitém bodě seče. Vznikají tak v A a B dvě řady promětné; svazky rovin o společné ose S, s těmi dvěma řadami perspektivné, tolikéž jsou promětny, i mají dvě roviny samodružné. V každé z těchto rovin površky obou paraboloidů se sjednocují. To jsou hledané dvojné přímky M N plochy uvažované. Majíce je sestrojiti, pokračujme takto: Na površce A uprostřed mezi body a a' vytkněme bod e, na površce C uprostřed mezi body c c' bod g, na přímce S uprostřed mezi body s s' bod i. V rovině E proložme pak bodem s' přímky

$$P \parallel sa \quad Q \parallel ie \quad R \parallel s'a';$$
$$P' \parallel sc \quad Q' \parallel ig \quad R' \parallel s'b'.$$

Samodružné paprsky U V promětných svazků $s'(PQR\dots)$ $s'(P'Q'R'\dots)$ jsou stopami hledaných rovin v rovině E. Rovina určená paprskem U a přímkou S, proniká ellipsu E' v bodech t' u', ellipsu E v bodech t u, přímky tt' uu' jsou površkami plochy, jsou spolu různosměrny a pronikem jejich jdoucí stejnosměrka s přímkou V jest jednou z hledaných dvojných přímek. Podobně obdržíme druhou.

*) Sr. Reye, Geometrie der Lage II. Aufl. p. 116.