Jan Mayer

Poznámka k úloze o trisekci úhlu

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 9 (1880), No. 1, 44--45

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123986

Poznámka k úloze o trísekci úhlu.

Podal

Jan Mayer, žák VIII. třídy gymn. v Jindř. Hradci.

Při řešení, jež podal pan *J. Bernard* v č. 1. roč. VIII. časopisu tohoto, objevují se při úhlech větších chyby velmi značné (při $\alpha = 120^0$ obnáší chyba již $1^0\,36'\,39''$, při $\alpha = 180^0$ obnáší $5^0\,15'\,52''$). Proto udávám zde dvě konstrukce dosti jednoduché a mnohem určitější.

I. Z vrchole O — ob. 8. — opíšeme oblouk kruhový AB, jímž měří se daný úhel α; oblouk ten rozpůlme v bodě C, odtud pak spusťme kolmici CD na rameno OA; vzdálenost DA rozpůlme v bodě E, v tom pak vztyčme kolmici EF, jež protne oblouk AB v bodě hledaném, takže přibližně arc $AF \doteq \frac{1}{3}$ arc AB. Jaký jest toho důkaz, jak veliké jsou chyby, a pro který úhel dosahuje chyba svého maxima?

II. Oblouk AB rozpůlme v bodě C, spojme bod B s bodem C a přímku spojovací prodlužme, až se protne v bodě D s kolmicí AD vztýčenou na rameně OA; bod D spojme s vrcholem O přímkou, jež protne tětivu AB v bodě E; délkou AE opišme z bodu A oblouk, až protne oblouk AB v hledaném bodě F, takže arc $AF \doteq \frac{1}{3}$ arc AB. Jak zní při této konstrukci odpovědi na otázky svrchu uvedené?

Poznámka. Nejedná-li se o velikou přesnosť a nepřesahuje-li úhel daný 120^0, lze bez značné chyby považovati již arc AH za třetinu arc AB. Jaká jest zde určitosť?

ad I. Nazveme-li daný úhel α, konstruovaný úhel ϱ, jest k určení maxima chyby ψ differencovati rovnice

$$\psi = \frac{\alpha}{3} - \varrho,\ \cos\varrho = \cos^2\frac{\alpha}{4}$$

Odtud plyne

$$\cos\frac{\alpha}{4} = \sqrt{0{\cdot}8},\quad \alpha = 106^0\,15'\,36''\,8,\quad \varrho = 36^0\,52'\,11''\,6$$

a maximum chyby

$$\psi = -1^0\,26'\,59''\,3$$

ad II. Zde jest differencovati rovnice

$$\psi = \frac{\alpha}{3} - \varrho, \quad \sin\frac{\varrho}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{2 + \cos\frac{\alpha}{2}}$$

Odtud plyne podmínka

$$2\cos^4\frac{\alpha}{2} + 12\cos^3\frac{\alpha}{2} - 9\cos^2\frac{\alpha}{2} - 8\cos\frac{\alpha}{2} + 3 = 0$$

Rovnice ta má reální kořeny

$1 \qquad = \cos 0^0$

$0.313\ 1467 = \cos 71^0\ 45'\ 3''7$. Tudíž jest

$\alpha_1 = 143^0\ 30'\ 7''\ 5$ a $\psi_1 = -0^0\ 38'\ 49''4$ aneb

$\alpha_2 = \quad 0^0$ a $\psi_2 = \quad 0^0$

Hodnota první udává maximum, hodnota druhá minimum chyby.

Úlohy.

Řešení cenné úlohy.

Jak různými spůsoby možná vésti důkaz, že

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (n)_k\, a_{k+1} = 0,$$

dokázaly zasilky, jež ke všeobecnému vyzvání, v posledním čísle tohoto časopisu učiněnému byly dodány, zejména od p. *P. V. Šimerky, Fr. Brandejsa, J. J. Havlíčka, O. Kobrle, M. Vaněčka, M. Lercha, V. Švejcara a J. Čečky.* Ale žádné z těchto řešení vesměs správných nebylo nejkratším, jakým se jeví býti vzorec (14) pojednání: „Příspěvky ku počtu s operačními symboly“, obsaženému v „Třetí zpr. jednoty čes. math. a fys.“ pag. 59; jelikož vzorec ten sám jest přímým řešením. Bylať tu vlastně na znalosť naší mathematické literatury položena cena!

Mathematická úloha 19.

Značí-li a, b, c strany, α, β, γ pak protilehlé úhly nějakého trojúhelníku, má se dokázati, že platí

$$\sqrt{a\sin\alpha} + \sqrt{b\sin\beta} + \sqrt{c\sin\gamma} = \sqrt{(a+b+c)(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)}.$$