Úlohy.

Z mathematiky.

19.

Řešiti jest soustavu rovnic

$$x^4 + y^4 + x^2y^2 = a,$$
$$x^2 + y^2 - xy = b.$$

Prof. *R. Hruša.*

20.

Řešte soustavu rovnic

$$x^2 + y^2 + xy = 7,$$
$$y^2 + z^2 + yz = 19,$$
$$z^2 + x^2 + xz = 13.$$

Prof. *Jan Schuster.*

21.

Na dvou pevných polednících nalezněte body téže šířky, aby pro ně

a) rozdíl oblouků je spojující rovnoběžky a hlavního kruhu byl co největší,

b) plocha mezi týmiž oblouky obsažená byla co největší.

Které hodnotě se blíží šířka φ, když se rozdíl délek obou míst blíží nulle. Prof. *Jan Schuster.*

22.

Tenký drát dané délky l svinut do šroubovice o n závitech, konce připojeny ke dvěma deskám kolmým k ose šroubovice. Jak daleko smí se desky od sebe vzdáliti, aby válec jimi i šroubovicí stanovený měl objem co největší? Prof. *Jan Schuster.*

23.

Nalezněte pravoúhlý rovnoběžnostěn objemu největšího a nejmenšího, jsou-li dány

a) součet rozměrů a tělesná úhlopříčka,

b) povrch a tělesná úhlopříčka,

c) součet rozměrů a povrch. Prof. *Jan Schuster.*

24.

Vepsati do ellipsy lichoběžník, jehož jedna základna, rovnoběžná s osou, má danou délku tak, aby plocha byla co největší. Prof. *Jan Schuster.*

25.

K počtu logarithmickému upraviti výraz

$$cotg\,\alpha\,cotg\,\beta - tg\,\gamma\,tg\,\delta,$$

je-li

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^0.$$

Prof. *R. Hruša.*

26.

Řešiti trojúhelník, je-li dán součet stran $a + b$, výška s vrcholu C a úhel γ. Prof. *R. Hruša.*

27.

Dán poloměr koule vepsané ϱ a poloměr $r = \frac{5}{2}\varrho$ koule opsané pravidelnému čtyřbokému jehlanu. Jest vypočítati povrch a objem jehlanu jakož i poloměr koule, která se dotýká všech osmi hran. Prof. Dr. *Josef Tomáš.*

28.

V komolém kuželi, přímém nebo šikmém, dány objemy dvou kuželů k_1 a k_2, jež obdržíme, když do komolého kužele vepíšeme dva kužele se pronikající tak, aby střed podstavy jednoho byl vrcholem kužele druhého; společný prostor obou těles tvořen jest právě danými kuželi k_1 a k_2. Vypočtěte objem komolého kužele a jeho zbytku, když těleso, jež tvoří oba kužele se pronikající, vyjmeme. Prof. Dr. *Josef Tomáš.*

29.

Kruhový prsten, vzniklý otočením kruhové úseče, menší polokruhu, kolem průměru, jenž plochy její neprotíná, jest půlen středním řezem úseče, t. j. řezem, který půlí tětivu úseče a stojí kolmo na ose rotační. Prof. Dr. *Josef Tomáš.*

30.

Sečísti řadu

$$\frac{2n+1}{n}\binom{n}{1} - \frac{2n}{n-1}\binom{n}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}(n+2)\binom{n}{n}.$$

Prof. Dr. *Josef Tomáš.*

Z fysiky.*)

1.

Dva podobné kuželové pláště jsou spojeny vrcholy, takže jejich osy spadají v tutéž přímku. Trigonometrická tangenta polovičního úhlu u vrcholu je rovna $\sqrt{2}$. Dokažte, že moment setrvačnosti dvojkužele kolem osy jest týž, jako moment kolem kterékoli přímky na ose kolmé a styčným bodem vrcholů procházející. R.

2.

Z tenkého kovového plechu jest zhotovena krychle strany l; určete její moment setrvačnosti kolem osy procházející středy dvou protilehlých stran, je-li hmota krychlové skřínky rovna M. R.

3.

Těžká homogenní tyč hmoty M a délky l jest zavěšena na jednom konci, takže může volně kývati ve vertikální rovině. Tyč držíme v poloze vodorovné a pak vypustíme. Určete její úhlovou rychlost, když prochází polohou vertikální, v níž se její těžiště nachází nejníže. R.

4.

Těleso může se valiti po nakloněné rovině sklonu α. Dokažte, že těleso právě se počne smýkat, je-li $tg\,\alpha = \mu\left(1 + \frac{r^2}{\varrho^2}\right)$,

*) Všechny úlohy připínají se k vývodům článku »O pohybu otáčivém«, uveřejněném v tomto čísle.

kde r je poloměr křivosti a ϱ poloměr setrvačnosti tělesa valícího se; μ je koefficient tření mezi tělesem a nakloněnou rovinou.

Poznámka. Tlačí-li těleso na rovinu kolmou na ní silou F, začne se smýkati, působí-li naň s rovinou rovnoběžná síla μF. Jest tedy μF maximální tangenciální síla, která smí vzniknout ve styčném bodu tělesa a roviny. R.

5.

Obruč průměru 1 m váží 1 kg. Jak veliká jest její kinetická energie, valí-li se po horizontální rovině postupnou rychlostí středu 12 km za hodinu. R.

6.

Moment setrvačnosti kladky u Atwoodova padostroje jest roven $m\varrho^2$ a každá z hmot po obou stranách na niti zavěšených je rovna M. Položíme-li na jednu z nich přívažek hmoty μ, vznikne lineární zrychlení (a) pohyblivého systému dané vztahem

$$a\left(2M + \mu + m\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2\right) = \mu g,$$

kde r jest poloměr kladky, po němž běží nit. Dokažte to! R.

7.

Veliká homogenní olověná koule hmoty M a poloměru R spočívá na horizontální rovině. Do ní vnikne ve výši jejího středu projektil hmoty m, vystřelený horizontální rychlostí V.

Dokažte, že se koule počne pohybovati (valiti) po rovině s postupnou rychlostí středu v, rovnou

$$v \doteq V\frac{m}{M}\frac{1}{1+\frac{\varrho^2}{R^2}},$$

předpokládajíce, že se koule po rovině nesmýká. R.

8.

Malé těžké těleso (hmotný bod) jest zavěšeno na dlouhé bezvážné niti. Držíme je nejprve tak, že napiatá nit je horizontální, a pak je vypustíme. Dokažte, že v nejnižším bodě dráhy je napětí niti rovno trojnásobné váze tělesa. R.

9.

Je-li místo tělesa na niti (úloha 8.) podobně otáčivě upevněna tyč (jako v úloze 3.), a nakládáme-li s ní obdobným způsobem, je síla působící na závěsnou osu během pohybu nejnižší polohou rovna $\frac{5}{2}$-násobné váze tyče. R.

10.

Řešte „Cvičení“ v § 6. článku „O pohybu otáčivém“. R.

11.

Řešte „Cvičení“ v § 8. článku „O pohybu otáčivém“. R.

12.

Řešte „Cvičení“ v § 10. článku „O pohybu otáčivém“. R.

Vypsání cen za řešení úloh.

Jako v letech dřívějších, budou i letos za správná řešení úloh v „Příloze" uděleny ceny *studujícím středních škol.* Ceny budou tyto:

A) Z mathematiky:

1. Ceny první.

Bellavitis-Zahradník: Methoda equipollencí.
Řehořovský: Základové vyšší algebry. Díl I. (Theorie souměrných funkcí kořenů).
Studnička: O kvaternionech.
Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, roč. 38.

2. Ceny druhé.

Petr-Sobotka: O životě a činnosti Eduarda Weyra.
Strouhal: Ocel a její vlastnosti galvanické a magnetické.
Šolín, Počátkové arithmografie.
Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, roč. 38.

3. Ceny třetí.

Čubr: O měření země.
Seydler: Izák Newton a jeho principia.
Studnička: Základové nauky o číslech.
Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, roč. 38.

Mimo to obdrží několik nejlepších řešitelů:

Fr. J. Studnička: Úvod do nauky o determinantech (Sborník J. Č. M. č. III).

B) **Z deskriptivní geometrie:**

Několik nejlepších řešitelů dostane spis:

J. Sobotka: Deskriptivní geometrie promítání parallelního (Sborník J. Č. M. č. X).

Mimo to bude řešitelům udělena cena:

F. Machovec: Zobrazování tečen a středů křivosti křivek.

C) **Z fysiky:**

Za nejlepší řešení všech *úloh fysikálních* bude jako cena udělen spis:

V. Strouhal: Akustika (Sborník J. Č. M. č. VI).

Kromě toho připadne některým řešitelům jako cena spis:

Briot-Pšenička: Mechanická theorie tepla.

Řešení úloh.

Řešení úloh buďtež zaslána do 15. dubna 1915 na adresu: S. doc. Dr. K. Rychlík, v Praze-II., Mikulandská 3.

Pp. řešitelé se žádají, aby řešení každé úlohy bylo napsáno zvlášť na jednu neb několik čtvrtek papíru obyčejného formátu. V čele každého řešení budiž uvedeno číslo úlohy (tekst úlohy není nutno psáti), jméno řešitele a ústavu, na němž studuje. Řešení buďtež seřazena podle čísel, a jsou-li zasílána v obalu menšího formátu než čtvrtkového, jako celek složena. Zároveň uveďte pp. řešitelé při poslední zásilce na zvláštním lístku papíru seznam všech řešení, která vůbec zaslali.

Mimo to je nutno, aby pp. řešitelé uvedli *přesnou adresu svou*, by mohly býti ceny správně rozeslány.
