Ludvík Prouza

Über die Koeffizienten der Fejérschen Polynome

Kybernetika, Vol. 7 (1971), No. 4, (299)--313

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/125226

KYBERNETIKA — JAHRGANG 7 (1971), HEFT 4

Über die Koeffizienten der Fejérschen Polynome

LUDVÍK PROUZA

Es werden als Lösung eines diskreten Randwertproblems die genauen Grenzen für die Koeffizienten der Fejérschen Kosinuspolynome abgeleitet und die Polynome konstruiert, für welche die Grenzen erreicht werden. Die mit dem Problem zusammenhängenden Determinanten werden mit Hilfe der Tschebyschevschen Polynome zweiter Art ausgedrückt. Das Problem der Koeffizientengrenzen wird auch mit einer „binären" Einschränkung gelöst.

1. EINLEITUNG

Es sei

$$x(z) = x_0 + x_1 z + \ldots + x_{n-1} z^{n-1} \tag{1}$$

ein Polynom in z mit reellen Koeffizienten $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$.

Dann ist

$$|x(z)|^2_{z=\exp it} = \lambda_0 + \lambda_1 \cos t + \ldots + \lambda_{n-1} \cos (n-1) t \tag{2}$$

ein nichtnegatives trigonometrisches Kosinuspolynom — das Fejérsche Polynom, für dessen Koeffizienten gilt

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 , \\ &\vdots \\ \lambda_r &= 2(x_0 x_r + x_1 x_{r+1} + \ldots + x_{n-1-r} x_{n-1}) , \\ &\vdots \\ \lambda_{n-1} &= 2 x_0 x_{n-1} . \end{aligned} \tag{3}$$

Nach einem bekannten Satz von Fejér-Riesz [1] kann auch umgekehrt jedes nichtnegative Kosinuspolynom rechts in (2) mit Hilfe der linken Seite ausgedrückt werden. Dabei können die Koeffizienten des Polynoms in (1) reell gewählt werden.

Es sei nun $\lambda_0 = 1$ normiert. Für die Koeffizienten λ_l $(l \neq 0)$ hat Fejér [1] die Ungleichung

$$-2 < \lambda_l < 2 \tag{4}$$

bewiesen, die (nach Carathéodory) allgemeiner auch für unendliche nichtnegative Fouriersche Kosinusreihen (mit $\lambda_0 = 1$) gilt.

Für λ_l mit

$$l = \left[\frac{n-1}{2}\right] + 1\,, \quad \left[\frac{n-1}{2}\right] + 2\,, \ \ldots, \ n - 1 \tag{5}$$

(wo $[r]$ die grösste ganze Zahl in r bedeutet) gelang es Fejér [1] durch einen Kunstgriff den folgenden wichtigen Satz beweisen.

Satz 1. *Für l aus* (5) *gilt*

$$-1 \leqq \lambda_l \leqq 1\,. \tag{6}$$

Aus dem Fejérschen Beweis ist zugleich die Struktur der zugehörigen „Grenzenpolynome" (1) (mit $\lambda_l = \pm 1$) ersichtlich.

Weiter hat Fejér [1] für λ_1 die Relation

$$-2\cos\frac{\pi}{n+1} \leqq \lambda_1 \leqq 2\cos\frac{\pi}{n+1} \tag{7}$$

bewiesen. Seinen Beweis wollen wir hier in der Kürze wiedergeben, da wir die Formeln, die Fejér in diesem Beweis benutzt hat, in weiteren allgemeinen Betrachtungen brauchen werden.

Wir sollen also die Extrema der quadratischen Form

$$\lambda_1 = 2(x_0x_1 + x_1x_2 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}) \tag{8}$$

suchen mit der Nebenbedingung

$$\lambda_0 = x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 = 1\,. \tag{9}$$

Nach einem wohlbekannten Satz der linearen Algebra sind diese Extrema gleich den extremalen Eigenwerten der zugehörigen Matrix

$${}_1\mathscr{P}_n = \begin{pmatrix} 0, & 1, & 0, & & \ldots, & 0, & 0 \\ 1, & 0, & 1, & 0, & \ldots, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & & \ldots, & 0, & 0 \\ & & & & & & \\ 0, & 0, & 0, & & \ldots, & 1, & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

und werden an Eigenvektoren von (10) erreicht, also an $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, welche die Gleichung

$$(11) \qquad {}_1\mathscr{P}_n \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \lambda_{1\,\substack{\max \\ \min}} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$$

erfüllen. Statt des charakteristischen Polynoms zu (10) untersucht Fejér das Polynom (was praktisch dasselbe ist)

$$(12) \qquad {}_1P_n(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda, & 1, & 0, & & \ldots, & 0, & 0, & 0 \\ 1, & \lambda, & 1, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 0 \\ & & & \vdots & & & & \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 1, & \lambda \end{vmatrix} .$$

Nun erfüllen die Polynome (12) mit veränderlichem n die Differenzengleichung

$$(13) \qquad {}_1P_n(\lambda) - \lambda \,.\, {}_1P_{n-1}(\lambda) + {}_1P_{n-2}(\lambda) = 0$$

mit den Anfangbedingungen

$$(14) \qquad {}_1P_0(\lambda) = 1 \,, \quad {}_1P_1(\lambda) = \lambda \,.$$

Die zugehörige Z-Transformierte ist

$$(15) \qquad \frac{z^2}{z^2 - \lambda z + 1} = {}_1P_0(\lambda) + {}_1P_1(\lambda) \,.\, z^{-1} + {}_1P_2(\lambda) \,.\, z^{-2} + \ldots$$

Nun setzt Fejér ein

$$(16) \qquad \lambda = 2 \cos \Theta$$

und benutzt eine aus der Analysis bekannte Formel

$$(17) \qquad \frac{z^2}{z^2 - 2 \cos \Theta \,.\, z + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin (n + 1)\, \Theta}{\sin \Theta} \,.\, z^{-n} \,.$$

Daraus folgt sofort

$$(18) \qquad {}_1P_n(2 \cos \Theta) = \frac{\sin (n + 1)\, \Theta}{\sin \Theta} \,.$$

Aus der rechten Seite ist ersichtlich, dass als Nullstellen von (18) die Werte

$$(19) \qquad \Theta = \frac{\pi}{n + 1}, \frac{2\pi}{n + 1}, \ldots, \frac{n\pi}{n + 1}$$

in Betracht kommen. Also hat ${}_1P_n(\lambda)$ n einfache Wurzeln

$$(20) \qquad \lambda = 2\cos\frac{\pi}{n+1}\,,\quad 2\cos\frac{2\pi}{n+1}\,,\ \ldots,\ 2\cos\frac{n\pi}{n+1}\,.$$

Daraus folgt (7).

Nun kann die Anwendung von (16), (17) als ein Kunstgriff aussehen, wir werden aber bald sehen, dass die systematische Lösung des Problems auf dasselbe hinauskommt.

Wir könnten jetzt weiter versuchen, für λ_2 ähnlich wie Fejér zu den Polynomen

$$(21) \qquad {}_2P_n(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda, & 0, & 1, & 0, & \ldots, & 0, & 0 \\ 0, & \lambda, & 0, & 1, & 0, \ldots, & 0, & 0 \\ & & & \vdots & & & \\ 0, & 0, & \ldots, & & 0, & 1, & 0, \ \lambda \end{vmatrix}$$

eine zu (13) analogische Differenzengleichung abzuleiten und dann eine zu (17) analogische Entwicklung zu suchen.

Aus (21) bekommt man

$$(22) \qquad {}_2P_n(\lambda) - \lambda \,.\, {}_2P_{n-1}(\lambda) + \lambda \,.\, {}_2P_{n-3}(\lambda) - {}_2P_{n-4}(\lambda) = 0$$

und die Anfangbedingungen

$${}_2P_0(\lambda) = 1\,,\quad {}_2P_1(\lambda) = \lambda\,,\quad {}_2P_2(\lambda) = \lambda^2\,,\quad {}_2P_3(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 1)\,.$$

Wegen der grösseren Kompliziertheit scheint hier die Fejérsche Methode schwer anwendbar zu sein, abgesehen davon, dass man keine Analogie zur Konstruktion der zu $\lambda_3, \lambda_4, \ldots$, gehörenden Gleichungen erhalten hat. Wir werden also eine andere Formulierung wählen.

2. EXTREMA FÜR λ_1 ALS LÖSUNG EINES DISKRETEN RANDWERTPROBLEMS

Aus (13), (14) folgt ${}_1P_{-1}(\lambda) = 0$. Wir können also die Fejérsche Aufgabe wie folgt formulieren. Wir wollen zur Differenzengleichung (13) mit einem Parameter λ eine von λ abhängige Lösung suchen, für welche die Randbedingungen

$$(23) \qquad {}_1P_{-1}(\lambda) = 0\,,\quad {}_1P_n(\lambda) = 0\,,\quad (n > 0)$$

erfüllt sind.

Zunächst werden wir einen Hilfssatz brauchen.

Satz 2. *Es sei*

$$(24) \qquad x_t + a_1x_{t-1} + a_2x_{t-2} = 0$$

eine lineare homogene Differenzengleichung der zweiten Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Für die Existenz einer nichttrivialen und die Randbedingungen

$$x_{-1} = 0\,, \quad x_n = 0\,, \quad (n > 0) \tag{25}$$

erfüllenden Lösung ist notwendig und hinreichend, dass entweder

a) *n ungerade, $a_1 = 0$, $a_2 < 0$ ist oder*
b) *die Gleichung* (24) *hat die Darstellung*

$$x_t - 2(\sqrt{a_2}) \cos \frac{k\pi}{n+1} \,.\, x_{t-1} + a_2 x_{t-2} = 0 \tag{26}$$

mit $a_2 > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Beweis. Man unterscheidet bei der zu (24) zugehörigen charakteristischen Gleichung

$$z^2 + a_1 z + a_2 = 0 \tag{27}$$

die drei Fälle:

a) (27) hat eine Doppelwurzel ϱ. Dann hat die allgemeine Lösung von (24) die Darstellung $x_t = (A_1 + A_2 t) \,.\, \varrho^t$,

b) (27) hat zwei verschiedene einfache reelle Wurzeln ϱ_1, ϱ_2. Dann hat die allgemeine Lösung die Darstellung $x_t = A_1 \varrho_1^t + A_2 \varrho_2^t$.

c) (27) hat zwei komplexkonjugierte Wurzeln ($\varrho > 0$, $0 < \varphi < \pi$), $\varrho_1 = \varrho \exp \mathrm{i}\, \varphi$, $\varrho_2 = \varrho \exp(-\mathrm{i}\varphi)$. Dann hat die allgemeine Lösung die gleiche Darstellung wie in b).

Setzt man nun die Darstellungen der Reihe nach in die Randbedingungen (25) ein, so überzeugt man sich leicht, dass es im Falle a) keine nichttriviale Lösung gibt, im Falle b) ist $\varrho_1 = \varrho = -\varrho_2$ und im Falle c)

$$\varrho_{1,2} = \varrho \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}k\pi/(n+1)}\,, \quad (k = 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{28}$$

Mit Hilfe der Formeln von Vieta folgt dann leicht die Behauptung des Satzes.

Vergleichen wir (13) mit (24) und (23) mit (25) und benutzen wir den Satz 2, so sieht man aus (26), dass genau die Werte (20) für λ in Betracht kommen. Die Substitution (16) ist dann ganz natürlich und die Lösung von (13) mit den Anfangsbedingungen $x_{-1} = 0$, $x_0 = 1$ ergibt

$$\begin{aligned} A_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Theta} + A_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta} &= 0\,, \\ A_1 \quad + A_2 \quad &= 1 \end{aligned} \tag{29}$$

und daraus

$${}_1P_n(2 \cos \Theta) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\Theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+1)\Theta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Theta}} = \frac{\sin (n+1)\, \Theta}{\sin \Theta} \tag{30}$$

wie in (18), so dass wir zugleich die Entwicklung in (17) wiedergefunden haben.

3. DER ZUSAMMENHANG DER POLYNOME ${}_1P_n(\lambda)$ UND DER TSCHEBYSCHEVSCHEN POLYNOME ZWEITER ART

Die Tschebyschevschen Polynome erfüllen bekanntlich die Differenzengleichung

$$\Phi_n(\lambda) - 2\lambda\, \Phi_{n-1}(\lambda) + \Phi_{n-2}(\lambda) = 0\,. \tag{31}$$

Durch die Anfangsbedingungen

$$\Phi_0(\lambda) = 1\,, \quad \Phi_1(\lambda) = \lambda \tag{32}$$

sind dabei die wohlbekannten Polynome $T_n(\lambda)$ der ersten Art definiert, durch die Anfangsbedingungen

$$\Phi_0(\lambda) = 1\,, \quad \Phi_1(\lambda) = 2\lambda \tag{33}$$

die (weniger bekannten) Polynome $U_n(\lambda)$ der zweiten Art.

Die Polynome der zweiten Art werden gewöhnlich nicht aus (31) definiert, sondern mit Hilfe derjenigen der ersten Art und der Relation

$$U_n(\lambda) = \lambda U_{n-1}(\lambda) + T_n(\lambda)\,. \tag{34}$$

Aus (31) und (34) bekommt man leicht

$$T_n(\lambda) = \lambda U_{n-1}(\lambda) - U_{n-2}(\lambda)\,. \tag{35}$$

Aus (34) und (35) folgt

$$2T_n(\lambda) = U_n(\lambda) - U_{n-2}(\lambda)\,, \quad (n > 1)\,. \tag{36}$$

Summiert man diese Differenzengleichungen einmal für gerade und einmal für ungerade n, so bekommt man für $U_n(\lambda)$ die folgende explizite Darstellung mit Hilfe der $T_n(\lambda)$:

$$\begin{aligned} U_{2n+1}(\lambda) &= 2\,.\sum_{j=0}^{n} T_{2j+1}(\lambda)\,, \\ U_{2n}(\lambda) &= 1 + 2\,.\sum_{j=1}^{n} T_{2j}(\lambda)\,. \end{aligned} \tag{37}$$

Vergleichen wir (13), (14) mit (31), (33), so sehen wir, dass

$${}_1P_n(\lambda) = U_n(\lambda/2)\,. \tag{38}$$

4. DIE GENAUEN KOEFFIZIENTENGRENZEN DER FEJÉRSCHEN POLYNOME

Es sei ein Fejérsches Kosinuspolynom (2) gegeben, es sei $\lambda_0 = 1$. Wir suchen die Grenzen von λ_l, $l = 1, 2, \ldots, n-1$, d.h. die Extrema der quadratischen Form

$$\lambda_l = 2(x_0 x_l + x_1 x_{l+1} + \ldots + x_{n-1-l} x_{n-1}) \tag{39}$$

mit der Nebenbedingung (9). Diese Extrema sind gleich der kleinsten bzw. grössten Wurzel der Gleichung

$$
{}_lP_n(\lambda) = \begin{vmatrix}
\lambda, 0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \quad \ldots, 0 \\
0, \lambda, 0, \ldots, 0, 0, 1, 0, \ldots, 0 \\
\vdots \\
1, 0, 0, \ldots \qquad\qquad\qquad 0 \\
0, 1, 0, \ldots, \qquad\qquad\qquad 0 \\
\vdots \\
0, 0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, \lambda
\end{vmatrix} = 0 . \tag{40}
$$

Wir numerieren die Reihen der Determinante mit $0, 1, \ldots, n-1$. Die 1 in der ersten Zeile steht in der l-ten Spalte.

Die Determinante ist 0 genau dann, wenn das folgende System von linearen Gleichungen eine nichttriviale Lösung besitzt:

$$
\begin{aligned}
\lambda x_0 &+ x_l &&= 0 , \\
\lambda x_1 &+ x_{l+1} &&= 0 , \\
&\ \vdots \\
\lambda x_{n-l-1} &+ x_{n-1} &&= 0 , \\
&\ \vdots \\
x_{n-l-1} &+ \lambda x_{n-1} &&= 0 .
\end{aligned} \tag{41}
$$

In (41) kann man die Wurzeln λ von (40) als Eigenwerte und die Lösungen als Eigenvektoren interpretieren.

Man überzeugt sich leicht, dass das System (41) mit folgender Differenzengleichung (42) der Ordnung $2l$ samt den Randbedingungen (43), (44) äquivalent ist:

$$x_{m+2l} + \lambda x_{m+l} + x_m = 0 , \tag{42}$$

$$x_{-l} = x_{-l+1} = \ldots = x_{-2} = x_{-1} = 0 , \tag{43}$$

$$x_n = x_{n+1} = \ldots = x_{n+l-2} = x_{n+l-1} = 0 . \tag{44}$$

Falls es uns also gelingt alle Lösungen zu (42), (43), (44) finden, so genügt es unter diesen diejenigen zwei auszusuchen, die zu $\lambda_{\max}$ und $\lambda_{\min}$ gehören. Das sind die Lösungen zu (39).

Mit Rücksicht auf (43), (44) wollen wir die Lösungen zu (42), (43), (44) als periodisch voraussetzen.

 Die charakteristische Gleichung zu (42) ist

$$z^{2l} + \lambda z^l + 1 = 0 ; \tag{45}$$

daraus mit $z = \exp \mathrm{i}\, \varphi$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}l\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}l\varphi} = -\lambda \tag{46}$$

und mit $l\varphi = \Theta$

$$\lambda = -2 \cos \Theta . \tag{47}$$

So ergibt (45)

$$\Pi(z) = z^{2l} - 2 \cos \Theta \,.\, z^l + 1 = 0 . \tag{48}$$

Wir konstruieren jetzt die Z-Transformierte

$$X(z) = x_{-2l} z^{2l} + x_{-2l+1} z^{2l-1} + \ldots + x_{-l-1} z^{l+1} + \\ + x_0 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + \ldots \tag{49}$$

In dieser haben wir (43) respektiert. Die weiteren Anfangsbedingungen $x_{-2l}, \ldots$ $\ldots, x_{-l-1}$ (insgesamt haben wir also $2l$ Anfangsbedingungen) sind beliebig, mindestens eine davon ist immer von 0 verschieden, sonst hätten wir nur die triviale Nullösung zu (42).

Mit Hilfe des bekannten Satzes über die Anfangswerte in der Z-Transformation (s. [2], S. 152) erhält man für (49) den Ausdruck

$$X(z) = \left(x_{-2l} z^{2l} + \ldots + x_{-l-1} z^{l+1}\right)\left(1 - \frac{1}{\Pi(z)}\right) \tag{50}$$

und mit Benutzung von (17), (18) schliesslich

$$\begin{aligned} X(z) = {} & x_{-2l} z^{2l} && + x_{-2l+1} z^{2l-1} && + \ldots + x_{-l-1} z^{l+1} - \\ & - x_{-2l} P_0 && - x_{-2l+1} P_0 z^{-1} && - \ldots - x_{-l-1} P_0 z^{-l+1} - \\ & - x_{-2l} P_1 z^{-l} && - x_{-2l+1} P_1 z^{-l-1} && - \ldots - x_{-l-1} P_1 z^{-2l+1} - \\ & - x_{-2l} P_2 z^{-2l} && - x_{-2l+1} P_2 z^{-2l-1} && - \ldots - x_{-l-1} P_2 z^{-3l+1} - \ldots \end{aligned} \tag{51}$$

wo $P_n = {}_1P_n(2 \cos \Theta)$. Aus (51) und mit Rücksicht auf Übersichtlichkeit der weiteren Formulationen zeigt sich die folgende Zerlegung als wichtig:

$$n = kl + j , \\ k = \left[\frac{n-1}{l}\right], \quad j = 1, 2, \ldots, l . \tag{52}$$

Wählen wir jetzt die Anfangsbedingungen

$$(53)\qquad \begin{aligned} &1)\ x_{-2l} \neq 0\,, \quad x_m = 0 \quad \text{für} \quad m \neq -2l\,,\\ &2)\ x_{-2l+1} \neq 0\,, \quad x_m = 0 \quad \text{für} \quad m \neq -2l+1\,,\\ &\quad\vdots \qquad\qquad\quad \vdots\\ &l)\ x_{-l-1} \neq 0\,, \quad x_m = 0 \quad \text{für} \quad m \neq -l-1\,, \end{aligned}$$

so sehen wir, dass die zugehörigen Lösungen linear unabhängig sind und jede Lösung von (42), welche die Bedingungen (43) erfüllt, lässt sich als derer lineare Kombination ausdrücken.

Wir suchen jetzt die weiteren Bedingungen, um auch (44) zu erfüllen. Es sollen also in (51) die Koeffizienten bei

$$(54)\qquad z^{-n} = z^{-(kl+j)}, \ldots, z^{-n-l+1} = z^{-[(k+1)l+j-1]}$$

Null werden. Das bedeutet mit Rücksicht auf (53), dass für j Lösungen $P_{k+1} = 0$ und für $l - j$ Lösungen $P_k = 0$.

Aus (20) und (47) sieht man, dass

$$(55)\qquad P_{k+1} = 0 \quad \text{für} \quad \lambda = 2\cos\frac{m\pi}{k+2}\,, \quad (m = 1, 2, \ldots, k+1)\,,$$

$$(56)\qquad P_k \quad = 0 \quad \text{für} \quad \lambda = 2\cos\frac{m\pi}{k+1}\,, \quad (m = 1, 2, \ldots, k)\,.$$

Aus der linearen Unabhängigkeit der j Lösungen mit $P_{k+1} = 0$ folgt, dass jeder der Werte λ aus (55) eine j-fache Wurzel von (40) ist. Ebenso ist jeder der Werte λ aus (56) eine $l - j$-fache Wurzel von (40). Wir haben also zu (40) insgesamt

$$(57)\qquad j(k+1) + (l-j)\,k = kl + j = n$$

Wurzeln gefunden, d. h. alle Wurzeln. Da aber in (40) der Koeffizient bei λ^n gleich 1 ist, so folgt für (40) die Darstellung

$$(58)\qquad {}_lP_n(\lambda) = {}_1P^j_{k+1}(\lambda)\,.\,{}_1P^{l-j}_k(\lambda)$$

mit k, j aus (52). Das Resultat können wir in einem Satz formulieren.

Satz 3. *Die Determinante in* (40) *besitzt die Zerlegung* (58) *mit* j, k *aus* (52) *und* ${}_1P_m(\lambda)$ *aus* (38) *oder* (13), (14). *Die Wurzeln von* (40) *sind durch* (55), (56) *gegeben und ihre Vielfachheit ist aus* (58) *klar.*

Aus (55) und (58) folgt unmittelbar der weitere Satz.

Satz 4. *Die genauen Grenzen von λ_l in (2) mit der Nebenbedingung (9) sind*

$$\lambda_{l\min} = -2\cos\frac{\pi}{k+2}, \quad \lambda_{l\max} = 2\cos\frac{\pi}{k+2} \tag{59}$$

mit k aus (52). Als Wurzeln von (40) sind sie j-fach mit j aus (52).

Betrachten wir jetzt als Spezialfall l aus (5). Aus (5) folgt

$$l \geqq \frac{n}{2}, \quad k = 1, \tag{60}$$

daher

$$\lambda_{l\max \atop \min} = \pm 2\cos\frac{\pi}{3} = \pm 1\,. \tag{61}$$

Das ist Fejérs Ergebnis (6).

Betrachten wir weiter $l = 1$. Dann ist in (52) $k = n - 1, j = 1$. Daher

$$\lambda_{l\max \atop \min} = \pm 2\cos\frac{\pi}{n+1}\,. \tag{62}$$

Das ist Fejérs Ergebnis (7).

5. DIE FEJÉRSCHEN POLYNOME, AN WELCHEN DIE EXTREMA VON λ_l ERREICHT WERDEN

Wie wir schon bemerkt haben, sind die Koeffizienten des Polynoms (1), das zu $\lambda_{l\max}$ gehört, die Koordinaten des zum Eigenwert $\lambda_{l\max}$ gehörenden Eigenvektors. $\lambda_{l\max}$ ist eine j-fache Wurzel von (40), also ist der allgemeine Eigenvektor als lineare Kombination von j linear unabhängigen Eigenvektoren gebildet. Anstatt des Eigenvektors wollen wir den zugehörigen Abschnitt der „Eigenlösung" der Differenzengleichung (42) betrachten. Wir können dazu die rechte Seite von (51) benutzen, wo die einzelnen „Spalten" gemäss (53) linear unabhängig sind. So bekommt man

$$\begin{aligned} x(z^{-1}) = x_{-2l} &\,.\,(P_0 + P_1 z^{-l} + \ldots + P_k z^{-kl}) + \\ + x_{-2l+1} z^{-1} &\,.\,(P_0 + P_1 z^{-l} + \ldots + P_k z^{-kl}) + \\ + \ldots + x_{-2l+j-1} z^{-j+1} &\,.\,(P_0 + P_1 z^{-l} + \ldots + P_k z^{-kl})\,. \end{aligned} \tag{63}$$

Schreibt man hier z statt z^{-1} und $x_0, x_1, \ldots, x_{j-1}$ statt der willkürlichen Konstanten $x_{-2l}, \ldots, x_{-2l+j-1}$, so erhält man schliesslich

$$x(z) = (x_0 + x_1 z + \ldots + x_{j-1} z^{j-1})\,.\,(P_0 + P_1 z^l + \ldots + P_k z^{kl})\,, \tag{64}$$

wobei nach (59)

$$P_m = {}_1P_m\left(2\cos\frac{\pi}{k+2}\right). \tag{65}$$

Dieses Resultat können wir in einem Satz formulieren.

Satz 5. *Das zu $\lambda_{l\max}$ aus* (59) *zugehörige Polynom* (1) *kann nach* (64) *in zwei Faktoren zerlegt werden. Die Koeffizienten des ersten Faktors sind willkürlich, diejenigen des zweiten Faktors durch* (65) *gegeben, j und k entsprechen den Formeln* (52)

Betrachten wir als Spezialfall l aus (5). Nach (60), (61) und (64) bekommt man (ohne Normierung $\lambda_0 = 1$)

$$\begin{aligned} x(z) &= (x_0 + x_1 z + \ldots + x_{n-l-1}z^{n-l-1}) \,.\, ({}_1P_0(1) + {}_1P_1(1)\, z^l) = \\ &= (x_0 + x_1 z + \ldots + x_{n-l-1}z^{n-l-1}) \,.\, (1 + z^l)\,. \end{aligned} \tag{66}$$

Dieses Resultat hat Fejér [1] mit Hilfe der in der Einleitung erwähnten Methode abgeleitet.

Betrachten wir weiter $l = 1$. Dann ist nach (52), (62) (64) und (18) (ohne Normierung $\lambda_0 = 1$)

$$\begin{aligned} x(z) &= P_0 + P_1 z + \ldots + P_{n-1}z^{n-1} = \\ &= \sin\frac{\pi}{n+1} + \sin\frac{2\pi}{n+1} \,.\, z + \ldots + \sin\frac{n\pi}{n+1} \,.\, z^{n-1}\,. \end{aligned} \tag{67}$$

Diese Formel hat Fejér in [1] ohne Beweis angeführt.

Betrachten wir noch ein numerisches Beispiel. Es sei $n = 5$, $l = 2$. Nach (52) $k = 2, j = 1$. Nach (59) $\lambda_{2\max} = 2\cos\pi/4 = \sqrt{2}$. Also nach (64) (ohne Normierung)

$$x(z) = 1 + \sqrt{2} \,.\, z^2 + z^4\,. \tag{68}$$

Daraus

$$F(t) = 1 + \sqrt{2}\cos 2t + \tfrac{1}{2}\cos 4t \tag{69}$$

ist das einzige Fejérsche Polynom mit $\lambda_0 = 1$, dessen λ_2 zum Maximum wird.

Man kann leicht einsehen, dass ale Wurzeln des zweiten Faktors in (64) genau auf dem Einheitskreise C_1 liegen müssen. Sonst könnte man einer Wurzel $\zeta \notin C_1$ und der zugehörigen Wurzel ζ^{-1} eine willkürliche genügend kleine Verschiebung erteilen, ohne die Nichtnegativität von (2) zu verletzen. Die Wurzel ζ würde also zum ersten Faktor in (64) gehören. Das ist aber unmöglich, denn wir hätten dann mehr als j linear unabhängige Eigenvektoren zu $\lambda_{l\max}$.

Wir werden jetzt die Wurzeln des zweiten Faktors in (64) suchen. Mit der Substitution $z^l = u$ handelt es sich zuerst um die Wurzeln der Gleichung

$$P_0 + P_1 u + \ldots + P_k u^k = 0\,. \tag{70}$$

Nun ist die Folge in (65) periodisch, wie man sich leicht überzeugt, und es gilt

$$P_{k+1} = 0\,, \quad P_{k+2} = -P_0\,, \quad P_{k+3} = -P_1\,, \quad \ldots \tag{71}$$

Man kann also schreiben

$$\begin{aligned} & P_0 + P_1 u + P_2 u^2 + \ldots = \\ = P_0 \quad & + P_1 u \quad + \ldots + P_k u^k - \\ & - P_0 u^{k+2} - P_1 u^{k+3} - \ldots - P_k u^{2k+2} + \\ & + P_0 u^{2k+4} + P_1 u^{2k+5} + \ldots + P_k u^{3k+4} - \ldots = \\ & = (P_0 + P_1 u + \ldots + P_k u^k) \, . \, (1 - u^{k+2} + u^{2(k+2)} - \ldots) = \\ & = (P_0 + P_1 u + \ldots + P_k u^k) \, . \, \frac{1}{1 + u^{k+2}} \end{aligned} \tag{72}$$

mit der Voraussetzung $|u| < 1$. Die linke Seite von (72) folgt aus (15), so dass

$$P_0 + P_1 u + \ldots + P_k u^k = \frac{1 + u^{k+2}}{1 - 2 \cos \dfrac{\pi}{k+2} u + u^2}\,. \tag{73}$$

Links in (73) steht ein Polynom, rechts heben sich also zwei Wurzeln des Nenners mit denselben Wurzeln des Zählers auf, die Voraussetzung $|u| < 1$ brauchen wir nicht mehr. Die Wurzeln des Zählers sind

$$u_m = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/(k+2) + 2m\pi/(k+2))}\,, \quad m = 0, 1, \ldots, k+1\,, \tag{74}$$

diejenigen des Nenners sind

$$u_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/(k+2)}\,, \quad u_{k+1} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/(k+2)}\,. \tag{75}$$

Man kann das Resultat in einem Satz formulieren.

Satz 6. *Die Wurzelverteilung von* (70) *bekommt man so, dass man von allen Werten von* $\sqrt[k+2]{-1}$ *diejenigen zwei weglässt, die am nächsten dem Punkt* (1, i0) *liegen. So bleiben k Werte* u_m, $m = 1, \ldots, k$ *aus* (74). *Die kl Wurzeln des zweiten Faktors in* (64) *sind alle verschiedene Werte von* $\sqrt[l]{u_m}$.

Jetzt wollen wir noch die korrespondierenden Resultate für $\lambda_{l\min}$ aus (59) zeigen. Aus (18) folgt, dass nun die zu (65) entsprechende Folge

$$P_0, -P_1, \ldots, (-1)^k P_k \tag{76}$$

ist. Daraus folgt der folgende Satz.

Satz 7. *Die Wurzelverteilung des zu $\lambda_{l\min}$ gehörenden Polynoms* (70) *entsteht aus der Wurzelverteilung zu $\lambda_{l\max}$ durch Verschieben jeder Wurzel um π (auf C_1).*

6. DIE GENAUEN KOEFFIZIENTENGRENZEN DER FEJÉRSCHEN POLYNOME MIT „BINÄREN" NEBENBEDINGUNGEN

Wir wollen jetzt die Extrema von λ_l untersuchen $(l = 1, 2, \ldots, n - 1)$ mit den Nebenbedingungen $x_j = \pm 1$ $(j = 0, 1, \ldots, n - 1)$. Mit diesen Nebenbedingungen gilt $\lambda_0 = n$ (der Übergang zur Normierung $\lambda_0 = 1$ ist trivial).

Wir werden hier nur das Maximum untersuchen. Aus (3) ist sofort der folgende Satz ersichtlich.

Satz 8. *Für $l = 1, \ldots, n - 1$ gilt $\lambda_{l\max} = n - l$ und wird für $x_0, \ldots, x_{n-1}$ erreicht, für welche das System*

$$\begin{aligned} x_l &= x_0\,, \\ x_{l+1} &= x_1\,, \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= x_{n-1-l} \end{aligned} \tag{77}$$

von $n - l$ linear unabhängigen Gleichungen erfüllt ist.

Es ist klar, dass gerade l von $x_0, \ldots, x_{n-1}$ willkürlich gewählt werden können. Wählen wir $x_0, x_1, \ldots, x_{l-1}$, so kann man statt (77) schreiben

$$\begin{aligned} x_l &= x_0\,, & x_{2l} &= x_l = x_0\,, \\ x_{l+1} &= x_1\,, & x_{2l+1} &= x_{l+1} = x_1\,, \quad \ldots \\ &\vdots & &\vdots \\ x_{2l-1} &= x_{l-1}\,, & x_{3l-1} &= x_{2l-1} = x_{l-1}\,, \end{aligned} \tag{78}$$

Daraus folgt mit der Zerlegung (52) die Darstellung

$$\begin{aligned} x(z) = {} & (x_0 + x_1 z + \ldots + x_{j-1} z^{j-1})(1 + z^l + \ldots + z^{kl}) + \\ & + (x_j z^j + \ldots + x_{l-1} z^{l-1})(1 + z^l + \ldots + z^{(k-1)l})\,, \end{aligned} \tag{79}$$

wobei für $j = l$ der zweite Summand wegfällt. Es gilt also der folgende Satz.

Satz 9. *Die Polynome $x(z)$, and denen $\lambda_{l\max}$ mit den Nebenbedingungen $x_j = \pm 1$ $(j = 0, 1, \ldots, n - 1)$ erreicht wird, besitzen die Darstellung* (79), *wobei k, j durch* (52) *gegeben und $x_0, \ldots, x_{l-1}$ willkürlich sind.*

Es ist klar, dass aus

$$x_0 = x_1 = \ldots = x_{l-1} = 1 \tag{80}$$

 folgt

$$(81) \qquad x_l = x_{l+1} = \ldots = x_{n-1} = 1 .$$

Also werden $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ zugleich zum Maximum. Geht man zur Normierung $\lambda_0 = 1$ über, so erhält man gerade den bekannten Fejérschen Kern. Man hat also den folgenden Satz.

Satz 10. *Mit den Nebenbedingungen $x_j = \pm 1/\sqrt{n}$ $(j = 0, \ldots, n-1)$ erreichen gerade für $x_j = 1/\sqrt{n}$ alle λ_l $(l = 1, 2, \ldots, n-1)$ zugleich ihren grössten Wert bei $\lambda_0 = 1$. Das zugehörige Fejérsche Polynom is der Fejérsche Kern*

$$(82) \qquad \mathscr{K}(t) = \frac{n + 2(n-1)\cos t + \ldots + 2\cos(n-1)t}{n} .$$

Da nun nach dem bekannten Fejérschen Satz für die Fejérschen Polynome $\mathscr{F}(t)$ gilt

$$(83) \qquad \mathop{\mathscr{F}}_{\max \mathscr{F}}(0) = \mathscr{K}(0) = n ,$$

so folgt daraus und aus

$$(84) \qquad \mathscr{F}(0) = \lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-1}$$

der folgende Satz.

Satz 11. *Gerade für den Fejérschen Kern* (82) *ist* (*unter allen Fejérschen Polynomen mit* $\lambda_0 = 1$) *die Summe der Koeffizienten in* (2) *maximal und gleicht n.*

(Eingegangen am 9. Januar 1971.)

LITERATUR

[1] Fejér, L.: Über trigonometrische Polynome. Jour. f. d. reine und angew. Math. (1916), 53—82.

[2] Цыпкин, Я. З.: Теория импульсных систем. Физматгиз, Москва 1958.

[3] Гельфанд, И. М.: Лекции по линейной алгебре. „Наука", Москва 1966.

[4] Prouza, L.: Über die Fejérschen Polynome und einige diskrete Filter und Signale. Kybernetika *5* (1969), 3, 223—232.

[5] Freud, G.: Orthogonale Polynome. Birkhäuser, Basel 1969.

[6] Pólya, G., Szegö, G.: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. Zweiter Band, Springer, Berlin 1925.

VÝTAH

O koeficientech Fejérových mnohočlenů

LUDVÍK PROUZA

V článku se odvozují jako řešení diskrétní okrajové úlohy přesné hranice koeficientů Fejérových mnohočlenů. Sestrojují se mnohočleny, na nichž jsou hranice koeficientů dosaženy. Jisté determinanty, souvisící s problémem, vyjadřují se s pomocí Čebyševových mnohočlenů druhého druhu. Problém hranic koeficientů je řešen též s jistým „binárním" omezením.

Dr. Ludvík Prouza, CSc., Ústav pro výzkum radiotechniky (Forschungsinstitut für Radiotechnik) Opočínek, p. Lány na Důlku.