Igor Kluvánek

# О представлении линейных отображений в виде интеграла

*Matematicko-fyzikálny časopis*, Vol. 12 (1962), No. 4, 241--245

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/126334`

MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS
ROČNÍK 12 1962 ČÍSLO 4

# О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ В ВИДЕ ИНТЕГРАЛА

ИГОРЬ КЛУВАНЕК (Igor Kluvánek), Братислава

Пусть $P$ — любое топологическое пространство, а $X$ — банаховское пространство. Обозначим через $\mathbf{C}_{00} = \mathbf{C}_{00}(P)$ множество всех вещественных функций на $P$, равных нулю вне компактных множеств.*

В статье [1] доказывается утверждение:

Линейное отображение $T$ пространства $\mathbf{C}_{00}$ в $X$, непрерывное в топологии равномерной сходимости пространства $\mathbf{C}_{00}$, представимо в виде

$$T(f) = \int f \, \mathrm{d}\mu, \qquad f \in \mathbf{C}_{00}, \tag{1}$$

где $\mu$ некоторая ($\sigma$-адитивная) векторная мера с значениями из $X$, тогда и только тогда, если для каждой функции $g \in \mathbf{C}_{00}$, $g \geqq 0$, множество $\{T(f) = |f| \leqq g, f \in \mathbf{C}_{00}\}$ является слабо относительно компактным в $X$.

Цель настояжей статьи — доказать, что это утверждение справедливо и без предположения о непрерывности отображения $T$. Обобщение, полученное таким образом, может быть интересным, так как многие отображения не являющиеся непрерывными, представими в виде (1).

Пример 1. Пусть $P = (-\infty, \infty)$ с обычной топологией действительной прямой. Пусть $X$ — множество всех вещественных чисел. Определим $T$ при помощи формулы

$$T(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \mathrm{d}t, \qquad f \in \mathbf{C}_{00}(P),$$

причем на правой стороне стоит обычный интеграл Лебега. Отображение $T$ — не непрерывно, но прямо определено в виде (1).

Пример 2. Пусть $P = (-\infty, \infty)$, $X = L^1(-\infty, \infty)$. Определим $T(f) = \varphi$ для всякого $f \in C_{00}$ таким образом, что для каждого $p \in P$ положим $\varphi(p) = f(p)$,

* Предположение, что $P$ является топологическим пространством, значит, только, что задано семейство открытых множеств в $P$, которое содержит $0$, $P$, объединение любого подсемейства и пересечение любого конечного подсемейства. Другие свойства, напр. аксиомы отделимости, не предполагаем.

Множество $A$ является компактным, если каждое семейство открытых множеств, покрывающее $A$, содержит конечное подсемейство, покрывающее $A$.

но $\varphi$ понимаем как элемент пространства $L^1(-\infty, \infty)$ с нормой $\|\varphi\| = \int |\varphi(t)| \, \mathrm{d}t$. Снова не трудно убедиться в том, что отображение $T$ не является непрерывным, если $\mathbf{C}_{00}$ наделено топологией, определенной при помощи нормы $\|f\| = \sup |f(p)|$. Отображение $T$ представимо в виде (1). В качестве $\mu$ возьмем векторную меру, значениям которой для всякого ограниченного борелевского множества $E$ на прямой является его характеристическая функция, рассматриваемая как элемент пространства $L^1(-\infty, \infty)$.

Переходим теперь к формулированию и доказательству главного результата. В самом деле докажем несколько более общую теорему. Сначала введем некоторые обозначения.

$X^*$ обозначает пространство всех непрерывных линейных функционалов на $X$.

Пусть $\mathbf{E}$ — векторная решетка, элементами которой служат вещественные функции, определенные на $P$ (не обязательно непрерывные; в самом деле, в следующих определениях и в теореме не нужно предполагать, что задана топология на $P$). Отображение $T$ переводящее $\mathbf{E}$ в $X$ называется линейным, если $T(\alpha f + \beta g) = \alpha T(f) + \beta T(g)$ для всех $f, g \in \mathbf{E}$ и вещественных чисел $\alpha$, $\beta$. Неотрицательный линейный функционал на $\mathbf{E}$ — это линейное отображение $I$ решетки $\mathbf{E}$ в множество вещественных чисел обладающее таким свойством, что $I(f) \geqq 0$ для $f \geqq 0, f \in \mathbf{E}$.

Будем говорить, что $E$ или $T$ обладает соответственно свойством $(i)$, $(ii)$, $(iii)$, $(iv)$, $(v)$, если имеет место соответствующее с приведенных здесь утверждений:

$(i)$ $\min\{f, 1\} \in \mathbf{E}$ для всякого $f \in \mathbf{E}$.

$(ii)$ Если $g \in \mathbf{E}$, $f_n \in \mathbf{E}$, $|f_n| \leqq g$, $n = 1, 2, \ldots$, и $f(p) = \lim f_n(p)$ для всех $p \in P$, то $f \in \mathbf{E}$.

$(iii)$ Если $f_n \in \mathbf{E}, f_n \geqq f_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, и $\lim f_n(p) = 0$, $p \in P$, то $\lim x^*(T(f_n)) = 0$ для всех $x^* \in X^*$.

$(iv)$ Для каждого $g \in \mathbf{E}$, $g \geqq 0$, множество $\{T(f) : |f| \leqq g, f \in \mathbf{E}\}$ слабо относительно компактно в $X$.

$(v)$ Если $f_n \in \mathbf{E}$, $f_n \geqq f_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$ и $\lim f_n(p) = 0$, $p \in P$, то $\lim I(f_n) = 0$ для всякого неотрицательного линейного функционала $I$ на $\mathbf{E}$.*

Утверждение „$T$ представимо в виде интеграла" значит, что существует $\delta$-кольцо подмножеств пространства $P$ и такая векторная мера $\mu$ со значениями из $X$ на нем, что $T(f) = \int f \, \mathrm{d}\mu$ для каждой функции $f \in \mathbf{E}$.

Определение и основные свойства интеграла приведены в [1].

**Теорема.** *Линейное отображение $T$ векторной решетки $\mathbf{E}$ функций на $P$ со свойствами $(i)$ и $(v)$ в пространство $X$ представимо в виде интеграла тогда и только тогда, если оно обладает свойством $(iv)$.*

При доказательстве того, что приведенное условие является достаточным

* См. [2], где свойство $(v)$ обозначается $(J)$.

используем два утверждения из [1], которые для удобства цитируем (несколько приспособленные для наших целей):

Пусть $\mathbf{E}$ — векторная решетка функций, $T$ — линейное отображение $\mathbf{E}$ в $X$, обладающее свойствами (*iii*) и (*iv*). Тогда существует линейная решетка $\mathbf{E}_1$ и линейное отображение $T_1$ со значениями из $X$ на ней так, что $\mathbf{E} \subset \mathbf{E}_1$; $T_1(f) = T(f)$ для $f \in \mathbf{E}$; $\mathbf{E}_1$ имеет свойство (*ii*); $T_1$ имеет свойство (*iii*).

Если $\mathbf{E}_2$ – линейная решетка функций со свойсрвами (*i*) и (*ii*) и $T_2$ – линейное отображение из $\mathbf{E}_2$ в X со свойством (*iii*), То $T_2$ представимо в виде интеграла.

Пусть выпольнены предположения теоремы и пусть $T$ обладает свойством (*iv*). Докажем сначала, что для $T$ имеет место (*iii*). Пусть $x^* \in X^*$. Для всякой функции $g \in \mathbf{E}$, $g \geqq 0$, положим

$$I(g) = 2 \sup \{\operatorname{Re} x^*(T(f)) : 0 \leqq f \leqq g, f \in \mathbf{E}\} +$$
$$+ 2 \sup \{\operatorname{Im} x^*(T(f)) : 0 \leqq f \leqq g, f \in \mathbf{E}\} - \operatorname{Re} x^*(T(g)) - \operatorname{Im} x^*(T(g)).$$

($I$ зависит тоже от $x^*$, но ради простоты в обозначении мы это не выразили.) По предположению, что для $T$ имеет место (*iv*), $I(g) < \infty$ для каждого $g \in \mathbf{E}$, $g \geqq 0$.

Далее для каждой функции $f \in \mathbf{E}$ положим

$$I(f) = I(\max\{f, 0\}) - I(-\min\{f, 0\}).$$

Не трудно доказать, что $I$ — неотрицательный линейный функционал на $\mathbf{E}$ (см. напр. [3], стр. 134—135). Имея в виду, что $|x^*(T(f))| \leqq I(|f|)$ для $f \in \mathbf{E}$ и что для $\mathbf{E}$ имеет место (*v*), мы получаем, что $T$ обладает свойством (*iii*).

В силу приведенного утверждения существует векторная решетка $\mathbf{E}_1$ и линейно отображение $T_1$ решетки $\mathbf{E}_1$ в $X$, причем $\mathbf{E}_1 \supset \mathbf{E}$; $T_1(f) = T(f)$ для $f \in \mathbf{E}$; $\mathbf{E}_1$ обладает свойством (*ii*); $T_1$ обладает свойством (*iii*).

Докажем теперь, что существует такая векторная решетка $\mathbf{E}_2$ со свойствами (*i*) и (*ii*) и линейное отображение $T_2$ решетки $\mathbf{E}_2$ в $X$ со свойством (*iii*), что $\mathbf{E} \subset \mathbf{E}_2$; $T_2(f) = T(f)$ для $f \in \mathbf{E}$.

Обозначим через $\Lambda$ семейство всех векторных решеток $\mathbf{F}$ со свойством (*i*), для которых $\mathbf{E} \subset \mathbf{F} \subset \mathbf{E}_1$. Семейство $\Lambda$ частично упорядочено по включению. Легко убедиться в том, что для него выполнены предположения леммы Цорна. По этой лемме $\Lambda$ содержит максимальный элемент $\mathbf{E}_2$. Очевидно, $\mathbf{E}_2$ обладает свойством (*i*). Докажем, что $\mathbf{E}_2$ имеет также свойство (*ii*).

Обозначим через $\mathbf{E}_3$ множество всех функций $f$ на $P$, к которым существует $g \in \mathbf{E}_2$ и функции $f_n \in \mathbf{E}_2$, $n = 1, 2, \ldots$, так что $|f_n| \leqq g$ и $f(p) = \lim f_n(p)$, $p \in P$. Очевидно, $\mathbf{E}_3 \in \Lambda$, $\mathbf{E}_2 \subset \mathbf{E}_3$. Но $\mathbf{E}_2$ — максимальный элемент семейства $\Lambda$, следовательно, $\mathbf{E}_3 = \mathbf{E}_2$. Значит, $\mathbf{E}_2$ обладает свойством (*ii*).

Положим $T_2(f) = T_1(f)$ для всех $f \in \mathbf{E}_2$. Очевидно, $\mathbf{E}_2$ и $T_2$ обладают всем требуемыми свойствами. В силу второго из утверждений, приведенных в начале доказательства, $T_2$ представимо в виде интеграла. Потому, что $T_2(f) = T(f)$ для $f \in \mathbf{E}$, $T$ тоже представимо в виде интеграла.

Пусть теперь $T$ представимо в виде интеграла относительно некоторой векторной меры $\mu$. По [1] множество всех $\mu$-интегрируемых функций является векторной решеткой со свойством (*ii*) и интеграл — линейное отображение на ней, обладающее свойствами (*iii*) и (*iv*). Из этого следует, что $T$ обладает свойством (*iv*).

Приведем несколько следствий доказанной теоремы, в которых будет играть некоторую роль тоже топология пространства $P$. В этих следствиях в $\mathbf{E}$ будут входить только непрерывные функции.

Обозначим через $\mathbf{C} = \mathbf{C}(P)$ множество всех непрерывных функций на $P$ (тоже неограниченных, если существуют такие). Пусть далее $\mathbf{C}_0 = \mathbf{C}_0(P)$ обозначает множество всех непрерывных функций на $P$, „обращающихся в нуль на бесконечности“. Выражение в кавычках означает то чно,что для $\varepsilon > 0$ и $f \in \mathbf{C}_0$ множество $\{p : |f(p)| \geqq \varepsilon\}$ содержится в некотором компактном подмножестве пространства $P$ (завысящем от $\varepsilon$ и $f$). Пусть значение $\mathbf{C}_{00}$ таково, как в начале статьи.

Следствие 1. *Пусть $\mathbf{E}$ — векторная решетка со свойством (i), $\mathbf{E} \subset \mathbf{C}_0$, и пусть для каждой функции $f \in \mathbf{E}$, $f \geqq 0$, существует функция $g \in \mathbf{E}$ такая, что $\sqrt{f} \leqq g$. Линейное отображение $\mathbf{E}$ в $X$ представимо в виде интеграла тогда и только тогда, если оно обладает свойством (iv).*

В силу теоремы достаточно доказать, что для $\mathbf{E}$ имеет место ($v$). Это сделаем следующим способом (см. [4]). Пусть $I$ — неотрицательный линейный функционал на $\mathbf{E}$. Обозначим $\|f\| = \sup_{p \in P} |f(p)|$ для $f \in \mathbf{C}_0$. Пусть $f_n \in \mathbf{E}$, $f_n \geqq f_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$ и $\lim f_n(p) = 0$ для $p \in P$. По предположению существует $g \in \mathbf{E}$ такое, что $\sqrt{f_1} \leqq g$. Очевидно, $f_n \leqq \sqrt{\|f_n\|}\sqrt{f_1} \leqq \sqrt{\|f_n\|}\, g$ и, следовательно, $0 \leqq I(f_n) \leqq \sqrt{\|f_n\|}\, I(g)$. Так как $f_n \in \mathbf{C}_0$, $n = 1, 2, \ldots$, из монотонной сходимости вытекает равномерная, значит $\lim \|f_n\| = 0$ и, далее $\lim I(f_n) = 0$. Это и означает, что $\mathbf{E}$ обладает свойством ($v$).

Следствие 2. *Пусть $\mathbf{E}$ — векторное пространство $\mathbf{E} \subset \mathbf{C}$. Пусть имеет место: Если $f \in \mathbf{C}$, $g \in \mathbf{E}$, $\{p : f(p) \neq 0\} \subset \{p : g(p) \neq 0\}$ то $f \in \mathbf{E}$. Линейное отображение $\mathbf{E}$ в $X$ представимо в виде интеграла тогда и только тогда, когда оно обладает свойством (iv).*

Из предположений следует, что $\mathbf{E}$ — векторная решетка. Снова достаточно доказать, что для $\mathbf{E}$ имеет место ($v$). Но это доказывается в [2], стр. 478.

Если $P = (-\infty, \infty)$ и в следствии 1 в качестве $\mathbf{E}$ возьмем множество всех функций из $\mathbf{C}_0$, постоянных в интервале $\langle 0, 1 \rangle$, то видим, что следствие 1 невозможно вывести из следствия 2. Если, наоборот, в следствии 2 приймем $\mathbf{E} = \mathbf{C}$, видим, что следствие 2 не вытекает из следствия 1. Но из обоих вытекает следующее следствие, представляющее утверждение, обещанное в начале статьи.

**Следствие 3.** *Линейное отображение* $\mathbf{C}_{00}$ *в* $X$ *представимо в виде интеграла тогда и только тогда, если оно обладает свойством* (*iv*).


## ЛИТЕРАТУРА

[1] Kluvánek I., *Некоторые обобщения теоремы Риса-Какутани*, Чехослов. мат. журнал. 13 (88) (1963). В печати.

[2] Mařík J., *Представление функционала в виде интеграла*, Чехослов. мат. журнал 5 (80) (1955), 467—487.

[3] Riesz F., Sz.-Nagy B., *Leçons d'Analyse fonctionelle*, Budapest 1952.

[4] Varadarajan V. S., *On a theorem of F. Riesz concerning the form of linear functionals*, Fund. Math. XLVI (1959), 209—220.



Поступило 10. 3. 1962 г.



*Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie*
*Elektrotechnickej fakulty Slovenskej vysokej školy technickej*
*v Bratislave*


## ON THE REPRESENTATION OF LINEAR TRANSFORMATIONS IN FORM OF INTEGRAL


Igor Kluvánek



Summary

Let $X$ be a Banach space and let $P$ be an arbitrary set. Suppose $\mathbf{E}$ be a linear lattice of real-valued functions on $P$ with the following properties:

$\min \{f, 1\} \in \mathbf{E}$ for every $f \in \mathbf{E}$.

For any non-negative linear functional $I$ on $\mathbf{E}$ (i. e. $I(f) \geqq 0$ for $f \in \mathbf{E}$, $f \geqq 0$, and $I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g)$ for $f, g \in \mathbf{E}$ and $\alpha$, $\beta$ real), and for any sequence $\{f_n\}$ such that $f_n \in \mathbf{E}$, $f_n \geqq f_{n+1}$ $n = 1, 2, \ldots$, and $\lim f_n = 0$, holds the relation $\lim I(f_n) = 0$.

It is proved, that a linear tranformation $T : \mathbf{E} \to X$ (no matter if continuous in any topology or not) may by writen in the form

$$T(f) = \int f \, \mathrm{d}\mu, \; f \in \mathbf{E},$$

where $\mu$ is some X-valued measure defined on a $\delta$-ring of subsets of $P$, if and only if, for every $g \in \mathbf{E}$, $g \geqq 0$, the set

$$\{T(f) : |f| \leqq g, \; f \in \mathbf{E}\}$$

is relatively weakly compact in $X$. (The definition and basic properties of integral are to be found in [1].)

From this theorem some corrolaries are derived for the case $P$ is a topological space and $\mathbf{E}$ consists of continuous functions. E. g. $\mathbf{E}$ may be the linear lattice of all continuous functions with compact support.