Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Jan Novotný

Geometrie a fyzika

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 23 (1978), No. 4, 203--210,211--212

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138569

Geometrie a fyzika

Jan Novotný, Brno

V roce 1976 jsme vzpomínali dvou významných mezníků ve vývoji vědy. Tehdy uplynulo 150 let od chvíle, kdy N. I. LOBAČEVSKIJ přednesl na kazaňské univerzitě teze své pozdější práce *O principech geometrie,* a 60 let od doby, kdy A. EINSTEIN dovedl do definitivní podoby a publikoval obecnou teorii relativity. Tato výročí byla podnětem k zamyšlení nejen nad vzájemnou souvislostí obou událostí, nad cestou od neeukleidovské geometrie k fyzice, která jí užívá jako svého mocného nástroje, ale i nad vývojem a perspektivami spolupráce mezi geometrií a fyzikou. Některé aspekty a výsledky tohoto vývoje se čtenářům pokouší přiblížit náš článek.

Objev neeukleidovské geometrie,*) k němuž dospěli zhruba současně s Lobačevským a nezávisle na něm také K. GAUSS a J. BOLYAI, učinil konec marným pokusům o důkaz 5. postulátu. Vedle eukleidovské geometrie, v níž součet úhlů v trojúhelníku je π, se začala rozvíjet geometrie nová – Lobačevského geometrie prostorů s konstantní zázápornou křivostí, v níž zmíněný součet je menší.

Tento revoluční krok v matematice tají již v sobě výzvu k neméně revolučním krokům ve fyzice. Objevem nové geometrie se totiž geometrická věda štěpí do dvou linií: geometrie jakožto axiomatický systém s logicky odvozovanými důsledky přechází do rámce čisté matematiky, zatímco geometrie jakožto „měření země“ čili nauka o vlastnostech fyzikálního prostoru se stává součástí empirické vědy – fyziky. V ní je třeba řešit otázku, jaký axiomatický systém odpovídá nejlépe vlastnostem reálného prostoru. Výroky Gausse a Lobačevského dokazují, že si tohoto revolučního dosahu svého objevu byli oba vědci vědomi.

Možné souvislosti mezi geometrií a fyzikou hluboce promýšlel B. RIEMANN. V práci *O hypotézách, které leží v základech geometrie,* publikované v r. 1866, jasně odděluje matematickou a fyzikální stránku problému a nalézá pro budoucí potřeby fyziky ještě mnohem širší základ, než je geometrie Lobačevského. Tímto základem je, jak bychom dnes řekli, n-rozměrná varieta (přesnou definici uvedeme později) s Riemannovou metrikou, to jest s pozitivně definitivní kvadratickou formou

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{i,k} g_{ik}(x)\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^k\,, \tag{1}$$

kde x^i $(i = 1, \ldots, n)$ jsou souřadnice v okolí některého bodu variety a veličiny $g_{ik}(x)$ jsou (v dnešní terminologii) složky metrického tenzoru v dané souřadnicové soustavě. Lze najít takovou souřadnicovou soustavu, že forma (1) nabývá v daném bodě pytha-

---

*) Základní práce tvůrců neeukleidovské geometrie a jejich pokračovatelů jsou nejsnáze přístupné ve sborníku [1].

gorejského tvaru

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \ldots + (dx^n)^2, \tag{2}$$

obecně však toho nelze dosáhnout v celém okolí daného bodu.

Riemann tak zbavil geometrii všech vlastností symetrie, které jsou charakteristické pro geometrii eukleidovskou i pro geometrii Lobačevského. Zároveň se zbavil i topologických omezení eukleidovské geometrie. Pochopil, že například může existovat prostor, který je neohraničený, ale co do objemu konečný.

Odchylky od eukleidovské geometrie, jak předpokládá jasnozřivě Riemann, se dají očekávat ve dvou směrech – při přechodu do astronomických rozměrů a při přechodu k mikrosvětu. Druhý směr se zdál v dané chvíli Riemannovi perspektivnější. „Empirické pojmy“, praví, „na nichž je zjišťování metrických vztahů založeno – pojem tuhého tělesa a světelného paprsku – zřejmě ztrácejí svůj význam v nekonečně malém. Je proto docela dobře myslitelné, že metrické vztahy prostoru v nekonečně malém neodpovídají předpokladům geometrů. Tento závěr bychom opravdu museli přijmout, kdybychom s jeho pomocí mohli prostěji vysvětlit pozorované jevy.“

Zhruba ve stejné době se rodí druhý význačný směr v geometrii. Je vyjádřen Erlangenským programem F. Kleina. Podrobnější poučení o něm najde čtenář na př. v [2], zde z něho ocitujme alespoň několik vět, v nichž je shrnuta jeho podstata:

„Je dána varieta a na ní grupa transformací. Je třeba zkoumat ty vlastnosti útvarů náležejících varietě, které se transformacemi grupy nemění ... Je třeba rozvinout teorii invariantů této grupy.“

V Erlangenském programu se o fyzikálních aplikacích přímo nehovoří, čtenář se však snadno domyslí, že zmíněné invarianty mohou být fyzikálně významnými veličinami. Ostatně Klein byl ke svému programu veden i vlastními fyzikálními zájmy. Třebaže se těžiště jeho zájmů natrvalo přesunulo do matematiky, přispěl některými výsledky přímo teoretické fyzice.

Pod vlivem Kleinových a Riemannových myšlenek vyrůstá ovoce, z něhož se dosud těšíme. Roku 1905 vytvořil A. Einstein speciální teorii relativity, kterou H. Poincaré a H. Minkowski (viz např. sborník [3]) interpretovali jako zobrazení soustavy prostorčas čtyřrozměrnou geometrií

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - (dx^4)^2. \tag{3}$$

První tři souřadnice popisují prostor, čtvrtá čas. Jejich odlišnost je plně vyjádřena znaménkem před posledním členem, které znamená, že geometrie je pseudoeukleidovská. Grupa transformací zachovávajících metriku tvaru (3) se nazývá Lorentzova. Její souvislost s relativností současnosti, kontrakcí délek a dilatací času je dnes všeobecně známa.

Po mnohaleté usilovné práci dokončil Einstein v roce 1916 obecnou teorii relativity. Prostoročas s gravitačním polem je v ní popsán formou

$$ds^2 = \sum_{i,k} g_{ik}(x)\, dx^i\, dx^k, \tag{4}$$

kterou lze uvést na tvar (3) v daném bodě, ale obecně nikoliv v celém jeho okolí. Mezi (4) a (3) je tedy obdobný vztah jako mezi (1) a (2). Geometrie prostoročasu je pseudo-riemannovská. Je vhodné ještě upozornit na to, že zatímco speciální relativita předpokládá eukleidovskou topologii prostoročasu (systém souřadnic v (3) pokrývá celou varietu), pro obecnou relativitu takové omezení odpadá a souřadnice x^i v (4) mohou být případně zavedeny pouze lokálně.

Není pochyby, že bez předchozího rozpracování geometrie by obecná teorie relativity nemohla být vůbec vytvořena.

Z idejí Erlangenského programu a těsně s ním související teorie Lieových grup vyrostla důležitá práce E. NOETHEROVÉ [4]. Ukazuje obecnou souvislost mezi zákony zachování a grupami symetrie, které existují v dané teorii. Spojovacím mostem mezi oběma okruhy pojmů je variační princip tvrdící, že pro skutečně se realizující fyzikální děj má jistý integrál (akce) extremální hodnotu. Přesněji řečeno: Z invariance akce vůči jednoparametrické grupě transformací plyne zachování jisté fyzikální veličiny. Význam tohoto výsledku přesahuje rámec každé konkrétní fyzikální teorie. Podrží si svou hodnotu, pokud budou ve fyzice existovat variační principy a principy symetrie. Teorie E. Noetherové nám například pomáhá zavádět fundamentální pojmy energie, hybnosti a momentu hybnosti ve všech teoriích, založených na variačním principu a spojených s pojmem prostoročasového kontinua. Zachování těchto veličin je důsledkem fyzikálních zákonů vůči translacím a otočením prostoročasu.

Dvacátá léta tak zastihují fyziku i geometrii ve stavu plodného napětí. Toto napětí zčásti vyvěrá, jak na to upozornil veliký geometr E. CARTAN (viz [1]), z rozporu mezi Erlangenským programem, který se rozkládá na grupě symetrie, jakou má metrika (3), a Riemannovou geometrií, jež naopak v obecném případě všechny symetrie vylučuje, jako je tomu v metrice (4). Tento rozpor se odráží v dlouhých diskusích o vzájemném poměru speciálního a obecného principu relativity. Je to problém, který trápil celou generaci relativistů. A z podobných kořenů vyrůstá i další stará otázka: Jak je tomu se zákony zachování v obecné relativitě? Víme, že tyto zákony souvisejí se symetriemi – co s nimi v prostoročase bez symetrií? Jak definovat energii a hybnost gravitačního pole? (Viz např. přehledný článek [5].)

Skvělý úspěch obecné relativity v geometrizování gravitace vedl Einsteina k otázce, zda by se nedalo geometrizovat i pole elektromagnetické. Začíná se série pokusů o vytvoření unitární teorie pole.

Konečně již první pokusy o řešení Einsteinových rovnic nastolují problémy topologie prostoročasu a problémy singularit v těchto řešeních. Ukazuje se nezbytným prohloubit naše fyzikální i geometrické představy, abychom lépe rozuměli možnostem, k nimž Einsteinova teorie vede. Na tomto místě je však vhodné rozloučit se s historickým výkladem, poněvadž všechny nadhozené problémy přesahují do dneška a skrze dnešek do budoucnosti.

Projděme proto nejprve některé základní pojmy. Mluví-li dnes fyzik o geometrii, má zpravidla na mysli geometrii diferenciální, jak je vyložena např. v knihách [6], [7], [8] aj. Základním pojmem je pro něho pojem variety, který se poprvé objevil v pracích Riemannových. *n-rozměrná varieta* je topologický prostor, kde ke každému bodu existuje jeho otevřené okolí homeomorfní (topologicky ekvivalentní — viz první stránky kterékoliv učebnice topologie) otevřenému okolí v n-rozměrném eukleidovském prostoru R^n. Pouze tato lokální topologická ekvivalence zůstala varietě z původního apriorního eukleidovského prostoru. Topologická (a tedy vzájemně jednoznačná) zobrazení mezi otevřenými okolími na varietě a v R^n nazýváme *mapami.* Mapa „vnáší" na „mapované území" variety *lokální souřadnice* $x^1, \ldots, x^n$. Soubor mapovaných území, pokrývajících varietu, spolu s příslušnými mapami nazýváme *atlasem.* Poněvadž zpravidla potřebujeme na varietě derivovat, omezujeme souřadnicové systémy požadavkem, aby přechod od jednoho k druhému byl diferencovatelným zobrazením jistého řádu. Zpravidla nic neztratíme, bude-li tento řád nekonečný. Mluvíme pak o *diferencovatelné varietě* třídy C^∞. V dalším se omezíme na tyto variety.

Takto definovaná varieta je pro fyzika ještě příliš obecná. Zpravidla žádá, aby ke každým dvěma bodům variety bylo možno nalézt jejich nepřekrývající se okolí — říkáme, že varieta je *Hausdorffova* — a aby varietu nebylo možno reprezentovat jako sjednocení dvou otevřených množin, nemajících společné body — varieta je *souvislá.* Je patrno, že tyto požadavky odpovídají našim představám o prostoročasovém kontinuu, jež varieta má zpravidla představovat.

Méně zřejmý je požadavek parakompaktnosti: Mějme otevřené pokrytí variety (tj. systém jejich otevřených podmnožin, jehož sjednocením je celá varieta). Zjemněním daného pokrytí nazveme takové pokrytí, jehož prvky jsou podmnožinami prvků původního pokrytí. Pokrytí se nazývá lokálně konečné, jestliže ke každému bodu variety existuje okolí, které protíná jen konečný počet prvků pokrytí. Varieta je *parakompaktní,* jestliže ke každému pokrytí existuje jeho lokálně konečné zjemnění.

Čistého matematika může překvapit, že tak jemná topologická definice má význam pro fyziku. Vskutku požadavek parakompaktnosti zaručuje existenci některých fyzikálně významných struktur.

Souvislá parakompaktní Hausdorffova varieta je podle dnešních představ důležitým pracovním pojmem pro velkou část teoretické fyziky, zejména pro fyziku prostoročasu. (Viz na př. [9].)

Fyzikovi ovšem nestačí „holá" varieta s pouhou topologií a diferencovatelnou strukturou. Zajímá se o geometrické objekty, útvary, které lze na varietě zadat nezávisle na souřadnicích (i když lze jejich komponenty počítat v různých souřadnicových soustavách). Klasickým příkladem geometrického objektu je vektorové pole neboli obecněji pole tenzorové. Moderní diferenciální geometrie precizuje a zobecňuje pojem geometrického objektu, zabývá se klasifikací objektů atd. Fyzikové se snaží přiřadit těmto objektům fyzikální význam.

Zvlášť důležité jsou ty geometrické objekty, které vznikly zobecněním struktur známých z eukleidovské geometrie (a jsou tedy geometrické v užším slova smyslu). Mezi ně patří především pseudoriemannovská *metrika.*

Dalším důležitým eukleidovským pojmem je pojem paralelního přenosu. V zakřivené riemannovské (resp. pseudoriemannovské) geometrii přestává tento přenos být absolutní a závisí na křivce, podle níž se děje. (Příslušnou teorii vytvořil LEVI CIVITA r. 1917.) Paralelní přenos podél křivek je zadán pomocí geometrické struktury zvané *konexe.*

Metrice odpovídá jistá speciální konexe, obecně je však pojem metriky na pojmu konexe nezávislý. Zadání konexe umožňuje tvořit z daných tenzorových polí pole nová – tzv. *kovariantní derivace* těchto polí.

Dále se zadáním konexe vnášejí na varietu dva důležité geometrické objekty – *tenzor křivosti* a *tenzor torze*. Nulovost pole tenzoru křivosti znamená, že prostor je plochý – paralelní přenos nezávisí na křivce, podél níž byl proveden. Nulovost pole tenzoru torze umožňuje konstruovat na varietě „infinitezimální rovnoběžníky".

Přesné definice uvedených pojmů najde čtenář v řadě učebnic diferenciální geometrie. Tam se také dočte o Lieových grupách, které jsou současně grupami i diferencovatelnými varietami a slouží obvykle fyzikům jakožto grupy transformací symetrie. Významnou kapitolou diferenciální geometrie je také teorie integrování na varietách. Integrovanými objekty jsou zde diferenciální formy (neboli pole antisymetrických kovariantních tenzorů) a závažným výsledkem teorie je zobecněná Stokesova věta (zahrnující jako své zvláštní případy známé věty Gaussovu a Stokesovu), která často umožňuje fyzikovi přecházet od diferenciálního k integrálnímu tvaru fyzikálních zákonů (či opačně).

Povšimněme si poněkud podrobněji pojmu, který nabyl v moderní diferenciální geometrii velkého významu. Je to pojem *fibrované variety*. Je tvořena dvěma varietami E a X (zvanými *totální prostor* a *báze*) a zobrazením πE na X (splňujícím jisté přirozené podmínky). Množina $\pi^{-1}(x)$ všech bodů E promítaných do daného bodu x báze se nazývá *fibr* (= vrstva). Teorie fibrovaných variet umožňuje například hlubším a obecnějším způsobem studovat geometrické objekty na bázi. Nás zde zajímají možnosti fyzikální interpretace: V klasické mechanice jednorozměrná varieta X odpovídá času, fibr odpovídá množině všech možných poloh soustavy hmotných bodů. V relativistických teoriích čtyřrozměrná varieta X odpovídá prostoročasovému kontinuu a fibr množině všech fyzikálních stavů, které mohou v daném bodě prostoročasu nastat.

Zobrazení γX do E takové, že $\pi \circ \gamma$ = identita, se nazývá *řezem* fibrované variety a představuje v našem případě jistou konkrétní historii fyzikálního systému. Řezu tedy odpovídá zadání souřadnic systému hmotných bodů jako funkcí času nebo intenzit polí jako funkcí souřadnic v prostoročasovém kontinuu. V teoretické fyzice často potřebujeme nejen samotná pole, ale i jejich první derivace (při formulaci variačních úloh) nebo derivace druhé (při formulaci pohybových rovnic). Příslušné fibrované variety, v nichž bod fibru odpovídá počátečním podmínkám pro hodnoty funkcí a všech jejich derivací až do určitého řádu k, se nazývají *holonomní prolongace* řádu k původní fibrované variety.

Pomocí fibrovaných variet je tedy možno formulovat základní fyzikální pojmy a teorie. Vzniká otázka, zda může tato nová formulace dát něco podstatně nového pro rozvoj fyziky. Řada význačných vědců, jako jsou A. LICHNEROWICZ, R. HERMANN, A. TRAUTMAN, na ni odpovídá kladně a v dané oblasti intenzívně pracuje (viz např. [10], [11], [12]); pracemi tohoto druhu začněme náš pokus o přehled hlavních směrů, v nichž se dnes děje spolupráce geometrie s fyzikou.

Jak jsme viděli, řezy fibrované variety mohou reprezentovat množinu všech kinematicky možných „historií" fyzikálního systému. Je proto vhodným základem k úvahám o globálním charakteru fyzikálních problémů. Ke kladení takovýchto otázek máme dnes řadu důvodů. Vybízí nás k němu kvantová mechanika tím, že opouští laplaceovsky deterministické stanovisko a dává všem možným výsledkům fyzikálních měření jistou pravděpodobnost realizace. Vede k němu také variační počet, při jehož fyzikální aplikaci se zabýváme určením skutečné trajektorie jakožto extremály mezi všemi kinematicky možnými trajektoriemi. Vzájemnou souvislost mezi oběma idejemi podává Feynmannova teorie integrálu po trajektoriích, která vysvětluje variační principy klasické fyziky jako makroskopický důsledek kvantových zákonitostí. V neposlední řadě si pak globální přístup vyžaduje problém stability řešení rovnic, aktuální zejména tam, kde známe jen jistá speciální řešení a nemůžeme si být bez dalšího zkoumání jisti, zda malá změna parametrů úplně nezmění chování systému.

To jsou důvody, pro něž roste ve fyzice potřeba metod, které by umožňovaly zkoumat nejen jisté konkrétní řešení rovnic, ale hlavně vzájemné souvislosti a obecné vlastnosti všech řešení. Teorie fibrovaných variet je jednou z možností, jak této potřebě vyhovět. Zatím byla úspěšně užita k nové formulaci Lagrangeova a Hamiltonova formalismu a souvislostí mezi principy symetrie a zákony zachování. Je zřejmé, že nová metoda umožňuje objevit nová fakta a vyjasnit některé principiální otázky.

Jak se zdá, podařilo se s definitivní platností vyjasnit vztah speciálního a obecného principu relativity (viz [13]), dospělo se k hlubšímu chápání problematiky zákonů zachování v obecné relativitě, fyzikálních aplikací teorie invariantů aj. Stojí za zmínku, že v některých pracích tohoto směru se vykládají základy teoretické fyziky pomocí teorie kategorií.

Používání fibrovaných variet ve fyzice nazval Trautman vyšším stupněm geometrizace fyziky. Ideje vzniklé v lůně geometrie jakožto matematické disciplíny se tu přenášejí na řešení fyzikálních problémů, přičemž nám někdy pomáhá geometrická intuice. Neznamená to, že by se předmět studia fyziků redukoval na vlastnosti prostoročasu. O takovéto radikální řešení však usiluje směr, jehož vůdčím představitelem je J. A. Wheeler, Bohrův žák a Feynmannův učitel. „Je prostoročasové kontinuum arénou jevů," táží se Wheeler a Misner, „anebo je vším?" [14] Neeukleidovská geometrie ukazuje na to, že aréna není něčím apriorně daným a že její tvářnost musí být zjištěna empiricky. Podle obecné relativity je tato tvářnost ovlivňována fyzikálními ději v aréně probíhajícími. Wheelerova škola extrapoluje vývoj fyziky a soudí, že v budoucnu by se aréna měla stát pro fyzika vším. Wheeler uvádí, že již W. K. Clifford r. 1870 navrhoval popsat hmotu jako místo velkého zakřivení prostoru a pohyb hmoty jako pohyb těchto zakřivení, způsobený jejich vzájemnou interakcí. Duchovním otcem myšlenky geometrizace fyziky se stal A. Einstein, když ve své obecné teorii relativity [15] popsal „gravitaci bez gravitace" jakožto zakřivení prostoročasu vyvolané přítomností hmot a ovlivňující jejich pohyb. Obecná relativita je tedy vlastně *geometrodynamikou,* naukou o časovém vývoji geometrie. Pohlédneme-li zběžně na Einsteinovy rovnice

$$R_{ik} - \tfrac{1}{2}g_{ik}R + \Lambda g_{ik} = -\varkappa T_{ik}\,, \tag{5}$$

můžeme dokonce nabýt dojmu, že Einstein geometrizoval nejen gravitaci. Tenzor energie-hybnosti T_{ik} na pravé straně rovnic se klade do rovnosti geometrickým veličinám (funkcím pole metrického tenzoru) na straně levé. Podle klasických představ byla

„hmota“ něčím v prostoru rozloženým a pohybujícím se, ale od něho odlišným a jeho geometrické vlastnosti neměnícím, zde však hmota vtiskuje geometrii stopy své přítomnosti, její energie a hybnost může být jednoznačně určena na základě geometrie.

Avšak energií a hybností není jednoznačně určena samotná „hmota“. Dvě v daném okamžiku totožné geometrie se mohou různě rozvíjet v čase, jsou-li „buzeny“ odlišnými druhy hmoty. Soustavu Einsteinových rovnic je třeba doplnit dalšími rovnicemi pro chování hmoty – v její přítomnosti se tedy Einsteinova teorie neredukuje na geometrodynamiku. Tuto situaci pociťoval Einstein jako neuspokojivou. Nelíbil se mu „fenomenologický“ tenzor na pravé straně rovnic, který podle jeho slov ve srovnání s „geometrickým“ tenzorem na straně levé působí jako dřevěná chatrč vedle kovové konstrukce. V době vzniku obecné relativity byly známy jen dvojí interakce – gravitační a elektromagnetická. Einstein se proto oddal myšlence popsat i „elektromagnetismus bez elektromagnetismu“ tím, že jej vyjádří pomocí nějaké další geometrické struktury. Těmto snahám o vytvoření unitární teorie pole zůstal věren do konce života. Úspěch obecné relativity činil zpočátku tuto cestu lákavou a ve stejném směru s Einsteinem pátrala i řada dalších velkých vědců, např. H. WEYL. Avšak vznik a rozvoj kvantové mechaniky vrhl fyziku na nové cesty a s objevem slabých a silných interakcí ztratil Einsteinův program na přitažlivosti, zejména když přes všechnu jeho snahu buď nebylo možno dospět k experimentálně ověřitelným výsledkům, nebo tyto výsledky experimentu odporovaly.

Wheelerova škola soudí, že „Einsteinovy vize“ byly v zásadě správné. Dokonce již původní verze obecné relativity ideálu unitární teorie do značné míry vyhovuje, neboť elektromagnetické pole ve vakuu „vtiskuje zakřivenému prostoru stopy tak specifického charakteru, že z nich téměř vždy lze zjistit vše nezbytné o samotném poli“ [16].

Stoupenci geometrodynamiky proto nenásledují Einsteina ve snahách o využití dalších geometrických struktur a spokojují se s metrikou. Klíč k záhadám stavby hmoty hledají o poschodí hlouběji – v topologii. I tuto cestu naznačil nejprve Einstein [17]. Wheeler ilustruje své myšlenky tímto přirovnáním: Hřeben zpěněné mořské vlny se nám zdánlivě jeví jako hladká plocha. Detailnější pohled ukáže nesmírnou složitost jeho stavby. Podobně i prostor má v mikroskopickém měřítku „pěnovou strukturu“, tato „topologická pěna“ se ve svém okolí projevuje jako „hmota bez hmoty“, „náboj bez náboje“ atd. Zájemce o bližší vysvětlení musíme odkázat k Wheelerovým knihám.

Jednotlivé výsledky a pojmy geometrodynamiky mají cenu i pro ty, kdo nepřijímají její radikální a filozoficky jistě problematický program. Rostoucí význam geometrie pro fyziku je však nepopíratelný.

Od vzniku obecné relativity se začali vyskytovat „fyzikové-geometři“, kteří rozpracovávali problémy konkrétních geometrických struktur a jejich aplikací. Mezi nimi si čelné místo vydobyla PETROVOVA škola, která i místem svého vzniku (Kazaň) navazuje na tradici Lobačevského. Petrovova klasifikace Einsteinových prostorů patří k nejvýznamnějším teoretickým výdobytkům v oblasti obecné relativity mimo jiné i pro svůj těsný vztah k teorii gravitačního záření (viz na př. [18]). Z dalších významných vědců na pomezí fyziky a geometrie uveďme aspoň J. L. SYNGA [19] a V. HLAVATÉHO [20].

V posledním desetiletí počet prací o geometrických strukturách obecné relativity prudce vzrostl. Rozvoj pozorovací techniky totiž ukázal na zásadní význam problémů struktury prostoročasu ve velkém měřítku a rozvoj teorie dovolil problémy s tím spojené účinně zkoumat.

Co se týče problémů topologických a s nimi spojených otázek kauzality, determinismu, orientovatelnosti atd., můžeme odkázat zejména na vynikající monografie [9], [21]. Na první pohled je z nich patrný nový styl psaní o obecné relativitě. Ubývá dříve tak typických indexů a naopak roste různorodost symbolů, jak se pracuje s geometrickými objekty samými namísto jejich souřadnicových komponent. Není snadné přehlédnout a zhodnotit všechny úspěchy, k nimž prohloubení geometrických představ přivedlo. Snad nejcennější je zavedení spinorů do zakřivených prostorů, které připravuje půdu pro sblížení obecné relativity s kvantovou fyzikou. S tím těsně souvisí mnohostranně užitečné zavádění tetrád (čtveřice ortonormálních vektorových polí) do obecné relativity (viz na př. [22], [23]. Geometrické představy pomohly také vyjasnit závažný problém definice fyzikálně měřitelných veličin a jejich závislosti na volbě vztažného systému (viz na př. [24], [25] aj.)

My se v dalším soustředíme již jen na problém singularit. Nejprve bylo třeba vyloučit fiktivní singularity, dané pouze „nevhodným" souřadným systémem (jako je např. pól na kulové ploše). Jak se však pozná skutečná singularita?

O nastolení a řešení tohoto problému se zasloužil zejména R. Geroch ([26] aj.). Z fyzikálního hlediska se zdá nejvhodnější považovat za singulární ty body variety, v nichž důležité fyzikální či geometrické invarianty nabývají nekonečných hodnot (např. skalární křivost nebo hustota hmoty). Cesta k matematickému precizování takové představy je však velmi neschůdná. Můžeme se např. pokusit „vypíchnout" nevhodný bod z variety; singularity (v předešlém smyslu) se tím zbavíme, přičemž zbylý prostor zůstane varietou. Vzniknou však jiné vady, které se odhalí při zkoumání metrických vlastností. Křivka, která dříve procházela singulárním bodem, se nyní nedá prodloužit do tohoto bodu a za něj. Na naší varietě se tedy objeví křivky konečné délky, které se nedají prodloužit. Varieta je *nekompletní.*

Pojmová rovnost singulární = nekompletní však uspokojuje pouze v Riemannově geometrii. Pseudoriemannovská metrika prostoročasu problém komplikuje. Vždyť dokonce i z Minkowského prostoročasu speciální teorie relativity by pozorovatel mohl v konečném vlastním čase (analogie délky) uniknout, kdyby k tomu nebylo potřeba nekonečné energie.

V každém případě musíme označit za singulární prostoročas, v němž jsou nekompletní ty geodetické čáry, které odpovídají pohybům volně padajících částic (*geodetická T-nekompletnost*). Z takového prostoročasu bychom mohli za konečnou dobu „vypadnout" bez jakéhokoli vlastního úsilí. Geodetická T-nekompletnost tedy dokazuje přítomnost singularity.*)

Jako už vícekrát při našem výkladu, i zde by se mohlo zdát, že jemný geometrický rozbor je zcela vzdálen skutečným potřebám a problémům fyziky. Avšak jedině tako-

*) Geroch uvádí příklad prostoročasu, z něhož sice nejde „vypadnout", ale lze z něho uletět raketou s konečnými zásobami pohonné energie. Takový prostoročas si rovněž zaslouží být považován za singulární. Geodetická T-nekompletnost je tedy pouze dostatečnou podmínkou singularity. Problém nejvhodnější definice a klasifikace singularit je nutno stále považovat za otevřený.

výto rozbor dovolil formulovat jeden z nejvýznamnějších výsledků obecné relativity – HAWKINGOVY teorémy o singularitách (1970, výklad viz [9], [21]). Již dříve bylo známo, že v kosmologickém Fridmanově řešení existuje počáteční (a v případě uzavřeného vesmíru i koncová) singularita (tzv. Big Bang) a že v singularitě končí také gravitační kolaps dostatečně masívní sféricky symetrické hvězdy (černá díra). Bylo zřejmé, že v kosmologii a v astrofyzice musíme počítat s obrovským zhuštěním hmoty. Sama singularita však mohla být důsledkem nereálného zjednodušení problému předpokladem o přesné symetrii. Bylo možno doufat, že odchylky od symetrie singularitu odstraní. Hawkingovy věty (a také současný rozbor skupiny E. M. Lifšice [27]) nám tuto uklidňující naději vzaly. Podle nich se singularity v řešení Einsteinových rovnic objevují za velmi obecných předpokladů, jež jsou splněny v reálných fyzikálních situacích. Obecná relativita tedy klade otázky, které ji přesahují.

Za vznik singulárních situací je odpovědný svět astronomických rozměrů, při nich však dostávají možnost se výrazně uplatnit síly mikrosvěta. Zdá se tedy, že „Světa původ seznáme a sil všech tajné zdroje" teprve po důsledném spojení obecné relativity s teorií kvantovou. Není však vyloučena ani jiná eventualita – že se podaří vytvořit nekvantovou teorii gravitace, která se v běžných situacích nebude odlišovat od dnes už vícenásobně ověřené obecné teorie relativity, ale pomůže nám zbavit se singularit v extrémních podmínkách. To je jeden z důvodů, proč škola profesora Trautmana ve Varšavě oživila teorii Einsteinovu-Cartanovu, zajímavou i tím, že získává pro fyziku kromě křivosti i torzi*), kterou spojuje se spinem hmoty (viz např. [13]).

Bez ohledu na to, jak se fyzika vypořádá se singularitami, je možné a potřebné studovat vlastnosti singulárních řešení Einsteinových rovnic. Jak čtenář jistě ví, dnes už klasická singularita typu černé díry je obklopena „horizontem", který brání ji uvidět (neboť zpod něho žádný signál do vnějšího prostoru nepronikne). Vliv černé díry na okolní hmotu však může být a v jednom případě již patrně byl (detekcí Rentgenova záření družicí Uhuru) úspěšně zjištěn. Zde si opět podává ruku fyzika s geometrií, neboť dráhy hmotných částic a fotonů v gravitačním poli jsou studovány jako křivky pseudoriemannovské geometrie.

Je otázka, zda se při astrofyzikálních dějích nemohou vytvořit i „nahé" singularity, jež by i vzdálený pozorovatel mohl vidět. Hypotézu, že takové singularity vzniknout nemohou, nazval R. PENROSE „principem kosmické cenzury". Nakolik tento princip platí, je jen jedna z mnoha otázek, jež si klademe v souvislosti se singularitami.

Na tomto místě naši procházku po styčných oblastech geometrie a fyziky zakončíme. Omezili jsme se hlavně na ty oblasti, kde je základním pojmem prostoročas chápaný jako varieta. Stranou našeho zájmu proto zůstala geometrie Hilbertova prostoru, která má základní význam pro kvantovou mechaniku, stejně jako snaha o pochopení klasifikace elementárních částic na základě teorie reprezentací Lieových grup. Nevěnovali jsme se také zatím spíše kvalitativním spekulacím o diskrétním prostoročase.

*) Tenzor torze pro riemannovskou konexi obecné relativity je roven nule. Mimo hmotu je torze nulová i v Einsteinově-Cartanově teorii. Vně hmoty zůstávají tedy v platnosti Einsteinovy rovnice obecné teorie relativity a běžné testy nemohou mezi obecnou relativitou a Einsteinovou-Cartanovou teorií rozhodnout.

Literatura:

[1] NORDEN A. P. red.: *Ob osnovanijach geometrii*, GITTL, Moskva 1956.
[2] VIZGIN V. P.: *Erlangenskaja programma i fizika*, Nauka, Moskva 1975.
[3] ŤAPKIN A. A., red.: *Princip otnositeľnosti*, Atomizdat, Moskva 1973.
[4] NOETHER E.: Gott. Nachr. *235* (1918).
[5] HORSKÝ J., NOVOTNÝ J.: Czech. J. Phys. *B19* (1969).
[6] NOMIZU K.: *Gruppy Li i differenciaľnaja geometrija*, IL, Moskva 1960.
[7] STERNBERG S.: *Lekcii po differenciaľnoj geometrii*, Mir, Moskva 1970.
[8] BISHOP R., GOLDBERG S.: *Tensor Analysis on Manifolds*, The Macmillan comp., New York 1968.
[9] HAWKING S., ELLIS G.: *The Large Scale Structure of Space-Time*, Univ. Press, Cambridge 1973.
[10] LICHNEROWICZ A.: Gen. Rel. and Grav. V 1, *3* (1971)
[11] HERMANN R.: *Differential Geometry and the Calculus of Variations*, New York and London 1968.
[12] KRUPKA D., TRAUTMAN A.: Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. Math. Astr. Phys. *22* (1974).
[13] TRAUTMAN A.: *Theory of Gravitation, in The Physicist's Conception of Nature*, ed. J. MEHRA, 179.
[14] MISNER C., WHEELER J. A.: Ann. of Phys., *2*, N 6 (1957).
[15] EINSTEIN A., ROSEN N.: Phys. Rev. *48* (1935).
[15] WHEELER J. A. *Predviděnije Ejnštejna*, Mir, Moskva 1970.
[17] EINSTEIN A.: Ann. Phys. *49* (1916).
[18] PETROV A. Z.: *Novyje metody v obščej teorii otnositeľnosti*, Fizmatgiz, Moskva 1966.
[19] SYNGE J. L.: *Relativity*, North-Holland Publ. Comp. Amsterdam 1960.
[20] HLAVATÝ V.: *Geometry of Einstein's Unified Field Theory*, Gröningen, Noordhoff 1958.
[21] PENROSE R.: *Struktura prostranstva-vremeni, Mir*, Moskva 1972.
[22] MØLLER C.: Mat. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk. 1, *10* (1961).
[23] MICKEVIČ N. V.: *Fizičeskije polja v obščej teorii otnositeľnosti* Nauka, Moskva 1969.
[24] SCHMUTZER E.: *Relativistische Physik*, B. G. Teubner, Leipzig 1968.
[25] NOVOTNÝ J., HORSKÝ J.: Czech. J. Phys. *B21* (1971).
[26] GEROCH R. P.: Ann Phys. *48* (1968).
[27] LANDAU L. D., LIFŠIC E. M.: *Teorija polja*, Nauka, Moskva 1973.

Poděkování:

Autor děkuje doc. dr. M. Černohorskému, CSc., doc. dr. J. Horskému, CSc., doc. dr. I. Kolářovi, DrSc., a recensentům za připomínky, které přispěly ke zlepšení článku.

Mluvíme nyní často o matematizaci věd a možná matematizaci celého života. Tuto tezi nutno ovšem přijímat s jistou dávkou opatrnosti. Matematik může pomoci při zpracovávání výsledků jiných vědních oborů, může pomoci při formulování základů vědních disciplín a při deduktivním odvozování závěrů. Nemůže však hledat základní zákonitosti, nemůže je přímo ověřovat, a hlavně nemůže výsledky těchto vědeckých disciplín realizovat.

V matematice více než kdekoli jinde platí zásada, že pro žáka má význam, čemu se naučí, jenom tenkrát, když dokonale rozumí zavedeným pojmům, když rozumí vztahům mezi nimi a když tyto vztahy umí účelně kombinovat k řešení daných úkolů. K zjištění těchto okolností bude třeba provádět řadu experimentů na žácích samých. Nemůžeme si totiž dělat iluze o tom, že by nám na řadu otázek, které se k tomu tématu pojí, dalo odpověď jen pouhé uvažování.